

I. WERKELIJKHEID EN GROEPEN

I.1. Constant en variabel

- 1.a. Typisch voor iedere opvatting over 'de werkelijkheid' is
- wat* in die werkelijkheid constant blijft;
 - wat* in die werkelijkheid verandert (absolute invariantie- variabiliteit);
 - wat* in die werkelijkheid constant blijft als men een bepaalde wijziging uitvoert; deze kan of een materiële daad zijn of een intellectuele verandering van onze representatie: relatieve invariantie-variabiliteit.

Voorlopig gaan we ons geen vragen stellen over de grond van het bestaan van absolute en relatieve invarianten. We gaan - niemand zal betwisten dat deze zeer algemene vooropstelling correct is - aanvaarden dat er absolute zowel als relatieve invarianten en variabelen zijn. Waarom dit het geval is, d.w.z. waarom we geen absoluut invariante of absoluut variabele wereld, of relatief volledig invariante, respectievelijk volledig variabele wereld hebben, is een probleem dat op een tegelijk dieper en meer elementair niveau moet worden gesteld en opgelost.

We kunnen het onderscheid tussen constant en variabel niet maken als we geen externe ruimte-tijd hebben waarin iets constant blijft of varieert, en er geen interne representatie van de ruimte-tijd waarin wij onze representaties doen variëren, wordt vóórondersteld. Over de grond daarvan, zowel als over de eigenschappen, breken wij ons hoofd niet. Laat alleen maar gezegd zijn dat die ruimte-tijden enige structuur moeten hebben; eenvoudige verzamelingen zijn niet genoeg, het moeten allicht metrische ruimten zijn. Maar men kan een grote vrijheid laten: continue of discontinue, eindig of oneindig dimensionale, vlakke of gekromde, homogeen isotrope of niet homogeen isotrope ruimten zijn allen gedeeltelijk adequaat.

Ook de structuur van de ruimte-tijd zal moeten worden gerechtvaardigd. Voorlopig is dat echter niet ons probleem.

2. Eens we hebben aanvaard dat er absolute en relatieve invarianten en variabelen zijn, stelt zich de vraag: welke en waarom? Daar gaat het ons om.

We kunnen echter niet eens aan die uiteenzetting beginnen als we geen middelen hebben om uit te drukken dat iets invariant of variabel is.

Vermits wij vertrekken van het samen bestaan van absolute en relatieve invariantie en variabiliteit ligt het voor de hand dat we onze invarianten zullen beschrijven door de variaties waaronder ze invariant blijven; zowel de externe als de interne.

3. Ook voor een theorie T kunnen we de invarianten bepalen. We kunnen namelijk entiteiten uit T op andere entiteiten uit T afbeelden. Als we een subklasse van relaties tussen de oordelen van T als de essentiële deductieve of logische structuur van T kiezen, dan zijn de logische symmetrieën van T die afbeeldingen die deze essentiële relaties invariant houden.

In de externe wereld kunnen de invarianten ofwel grootheden, ofwel eigenschappen, ofwel relaties zijn. Van een deductieve structuur is dan geen sprake. Maar toch kunnen we de veranderingen in de externe wereld ook karakteriseren door afbeeldingen van entiteiten op andere waarin ze overgaan. De invarianten wijzigen zich door deze afbeeldingen niet.

We herhalen het nog eens:

1. Om de invarianten van de werkelijkheid te karakteriseren gaan we aangeven *wat* invariant blijft onder welke transformaties.
2. Deze transformaties zijn afbeeldingen in één van de vele mogelijke ruimten en tijden.
3. (Een nieuw punt in de redenering): de structuur van de transformaties, hun onderlinge relaties, kunnen gekarakteriseerd worden in zichzelf, abstractie makend van de wijzigingen waarmee ze in het veld (de ruimte-tijd waarin ze zich ontplooiën) samenhangen.
4. De directe studie van de invarianten dateert eigenlijk van Kleins Erlanger programma in de meetkunde maar breekt pas door in de theoretische natuurkunde met de vroege kwantummechanica: de eerste uitgave van Herman Weyls boek over *Gruppentheorie und Quantenmechanik* dateert van 1928. Eugen Wigners *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektien* verschijnt in 1931. De twee werken hebben wel niet dezelfde opbouw maar ze gelijken hierin op elkaar dat beide met vectoren en matrices openen, daarna de kwantummechanica zoals ze toen verscheen uiteenzetten, en daarna over groepen en hun representaties ('Darstellungen') spreken die in de kwantummechanica toepasbaar zijn.

Als een halve eeuw later J.P. Elliott en P.G. Dawber in 1979 de twee banden van *Symmetry in Physics* doen verschijnen, beginnen ze het tweede hoofdstuk met 'Groups and group properties', gaan voort met 'Linear algebra and vector spaces' (K3) en brengen de twee ideeën samen in 'Group representations' (K4). Deze algemene ideeën worden daarna toegepast op kwantummechanica (K5), moleculaire structuren (K6), continue groepen (K7), hoekmomentum en rotatiegroepen, puntgroepen en kristalvelden, speciale unitaire groepen ($SU_{1,2,3,4,5,6}$) gerealiseerd in kern en elementaire partikels (K7-12), verdere studie van symmetrie in kristallen (K14), de Lorentz- en Poincaré-groep in de relativistische ruimte-tijd, de symmetrische groep S_n , de unitaire groep U_n met nog speciale problemen rond symmetriebrekingen, approximaties, subgroepen, groepproducten¹.

We vergelijken die drie werken om te onderstrepen hoe de studie van invarianten met behulp van groepen, vanuit de kwantummechanica, de hele theoretische natuurkunde (tot en met relativistische en klassieke mechanica heeft doortrokken, de laatste halve eeuw). Al zijn de inhoudelijke theorieën nog steeds niet geünificeerd, toch blijkt het direct zoeken naar toepassingen van groepen (die steeds invarianten uitdrukken) een leidraad. Naast die abstracte groepentheorieën staan dan steeds vectoren en matrices in en over speciale ruimten (hun representaties, concretisaties).

Onze grondvraag: waarom deze invarianten en gindse variabelen is wel niet identisch met, maar houdt toch duidelijk verband met de vraag: waarom blijken deze en gene groepen in de werkelijkheid gerealiseerd te zijn, en geen andere? Waarom zijn ze juist gerealiseerd voor deze grootheden en niet voor andere?

We zullen beginnen met in herinnering te brengen wat iedereen weet: wat zijn abstracte groepen en wat hun representaties zijn. Dit is geen wijsgerige bijdrage. Verder vragen we ons af of we de wijsgerige betekenis van de groepenstructuur kunnen achterhalen.

Later zal onze hoofdvraag worden: waarom wordt de werkelijkheid gekarakteriseerd door *deze*, *speciale*, groepsstructuren. Dit wordt hier echter slechts aangekondigd. Voorlopig houden we ons bezig met de groepenstructuur in haar algemeenheid.

¹ In T. Kakan: Boch X en T. Kakan 1960, TI: 'La théorie des groupes en physique classique et quantique' (in TII en III later verschenen vindt men een gelijkaardige opbouw.)

I.2. Groepen en realiteit

Een verzameling $\underline{G}$ van elementen $G_1 G_2 G_3 \dots$ is een groep als een verbinding ('komposition' zegt Weyl, 'Verknüpfung' Wigner, multiplicatie of product zowel Wigner als Elliott-Dawber) voor alle elementen van $\underline{G}$ bestaat, waarvoor geldt:

1. het product $G_a G_b = G_c$ behoort zelf tot $\underline{G}$ (voor alle koppels van elementen van $\underline{G}$);
2. de orde waarin de compositie gebeurt, heeft geen belang voor haar resultaat
 $G_a (G_b G_c) = (G_a G_b) G_c$ (het product binnen de haakjes wordt eerst gevormd);
3. één en één enkel element van $\underline{G}$ is een eenheid (in die zin dat het de elementen waarmee het gecombineerd wordt niet wijzigt)
 $E G_a = G_a$ en $G_a E = G_a$;
4. met ieder element in $\underline{G}$ komt één en één enkel element van $\underline{G}$ overeen, zijn inverse dat de eigenschap heeft
 $G_a G_a^{-1} = E$ en $G_a^{-1} G_a = E$.

Een groep kan een eindig of oneindig aantal elementen hebben.

Concrete voorbeelden van groepen zijn talloos. Een bijzonder eenvoudig en belangrijk voorbeeld is de verzameling van alle rotaties van een driedimensionaal lichaam rond assen en de drie dimensies die elkaar snijden in een vast punt. Een ander eenvoudig en belangrijk voorbeeld is de verzameling van alle permutaties van een eindig aantal objecten.

Om het verband tussen de abstracte groepen en de theorie van invarianten duidelijk te maken moet men niet alleen de abstracte groepen bekijken, maar wat de elementen van die groepen als transformaties of veranderingen veroorzaken in een gegeven domein of ruimte.

Als R zo'n ruimte is, en T een afbeelding van die ruimte in zichzelf, dan is T een representatie, verwerkelijking, concretisatie van een groep als voor de wet van combinatie van T geldt dat voor alle elementen van G

$$T(G_a)T(G_b) = T(G_a G_b) \quad T(E) = 1.$$

De voorstelling is trouw als de overeenstemming tussen $\underline{G}$ en $\underline{T}$ een isoformisme is, d.w.z. als uit $G_a \neq G_b$ volgt dat de transformaties die ermee overeenkomen $T(G_a)$ en $T(G_b)$ ook verschillend zijn:

$$a \neq b \Rightarrow T(G_a) \neq T(G_b).$$

De transformaties waardoor abstracte groeps-elementen zijn gerealiseerd of geconcretiseerd, worden in regel gekozen als lineaire transformaties in een lineaire ruimte. Wij realiseren ons echter wel dat de meeste mogelijke ruimten niet lineair zijn en de meeste mogelijke transformaties evenmin. In vergelijking met de abstracte groepentheorie treedt dus een enorm verlies aan algemeenheid op. Althans op het eerste gezicht. Dat de werkelijkheid dit toelaat is op het eerste gezicht een belangrijk inzicht in haar natuur; te snel mogen wij echter niet victorie kraaien: lineariteit is gemakkelijk en beheersbaar. De optie ervoor heeft misschien geen principiële betekenis. We realiseren ons dat we dieper op de keuze van de transformaties en hun actievelid moeten ingaan. Maar eerst moet nog een duidelijker verband worden gelegd tussen *invarianten en groepen*.

Ons doel is eigenschappen bloot te leggen die gemeen zijn aan alles wat bestaat (ontologie). Tweede doel is eigenschappen bloot te leggen van de totaliteit van alles wat bestaat (metafysica). De twee doelen kunnen worden verwerkelijkt ofwel door een bepaling voor 'bestaan' te selecteren, ofwel, zonder dat te doen, door te vertrekken van intuïtieve eigenschappen die, volgens ons inzicht, uit het bestaan als zodanig volgen. Anders gezegd: het veld waarop we de abstracte groep kunnen betrekken kan de verzameling van alle werkelijke wezens zijn. We

hebben aangenomen dat er invarianten in voorkomen. We hebben ook aangenomen dat er variaties in voorkomen. Laten wij die veranderingen voorstellen als het gevolg van de actie van elementen van een groep.

De eerste groepeeigenschap zou vals zijn indien er transformaties van de werkelijkheid zouden bestaan die, als we ze met elkaar verbinden, geen transformatie van de werkelijkheid meer zouden opleveren. De acties zouden geen gesloten verzameling meer vormen, de transformaties evenmin. Als geen enkele combinatie van de transformaties van de werkelijkheid ons buiten het domein van de transformaties van de werkelijkheid kan leiden, dan voldoen die transformaties aan de eerste groepeeigenschap.

De tweede groepeeigenschap zou vals zijn als geen enkele transformatie zou bestaan die de werkelijkheid constant of invariant zou laten.

De derde groepeeigenschap zou vals zijn als voor alle complexe groepstransformaties, de orde waarin de complexe groepstransformaties wordt uitgevoerd bepalend zou zijn. Complexe bewerkingen in verschillende orde uitgevoerd zouden steeds een ander resultaat moeten hebben.

Hier wordt wel uitleg vereist: voor niet samengestelde bewerkingen heeft de orde van uitvoering in het algemeen wél belang:

$G_a G_b \neq G_b G_a$ voor niet abeliaanse groepen. Belangrijke groepen zijn niet steeds abeliaans. In tegenstelling daarmee echter geldt:

$$G_a(G_b G_c) = (G_a G_b)G_c.$$

Eerst $G_b G_c$ (en dan G_a) of eerst $G_a G_b$ (en dan G_c) maakt geen verschil!

Het vraagt wel enig nadenken vóór men bij toepassing van het groepsbegrip, inziet 1. dat voor vele groepelementen de orde van uitvoering ingrijpend verschil maakt 2. terwijl voor complexe elementen die orde geen verschil maakt (pas op):

$(G_b G_c)(G_d G_e) \neq (G_d G_e)(G_b G_c)$ want - eigenschap 1 - $G_b G_c = G_x$ en $G_d G_e = G_y$ en - in het algemeen - $G_x G_y \neq G_y G_x$!).

Indien de orde van uitvoering nooit verschil zou maken, dan zou er in het beschouwde veld nooit iets veranderen. Indien complexe transformaties nooit kunnen worden opgebroken in hun elementen, dan zouden gehelen nooit meer kunnen worden gedeeld.

Eindelijk, als de groep geen inversen zou bevatten, dan zou het constant blijven van de werkelijkheid nooit kunnen worden opgebouwd door elkaar compenserende, ongedaan makende, veranderingen.

Na deze toepassing van het groepsbegrip op de werkelijkheid in het algemeen blijkt dat de transformaties van de werkelijkheid *als zij met elkaar combineerbaar zijn* (wat de *eenheid*) van het systeem veronderstelt), als er *zowel eenvoudige als complexe bewerkingen* bestaan die de werkelijkheid *constant* houden (*E* en *inverse*), als er niettegenstaande dat *toch orde in de transformaties* bestaat (zodat men over *verandering* kan spreken) en als *sommige combinaties* van transformaties *geen impact* hebben (*associativiteit*), dan moeten de variaties die de werkelijkheid ondergaat samen transformaties vormen die de groepeeigenschap hebben. Om tot dit besluit te komen hebben we gebruik gemaakt van het bestaan van een gesloten werkelijkheid (en een gesloten systeem van transformaties), van het bestaan van constanten, van de universele compenseerbaarheid (veralgemeende omkeerbaarheid van alle transformaties) en van een partiële bepaling van verandering door het niet permuteerbaar zijn van zekere operaties (want - evident - zelfs al is $AB \neq BA$, dan nog is $AA^{-1} = A^{-1}A$!). We hebben geen speciale bepaling van zijn, werkelijkheid of totaliteit nodig gehad.

Dit is zeker voordelig en wenselijk. Maar boeiender resultaten zouden kunnen worden bereikt als men sterker postulaten invoert. Wij zullen dat zo dadelijk trachten uit te maken. Voordien moeten we nog even tonen dat de werkelijkheid niet alleen de realisatie van één of meer abstracte groepen kan zijn. Tenminste niet 'probleemloos'!

Algebra heeft naast groepen ook meer algemene begrippen ingevoerd.

Een semi-groep is gesloten onder een compositie (zoals een eerste eigenschap van een groep) en de compositie is associatief (derde eigenschap). Voor een semi-groep geldt noch het bestaan van een eenheid, noch het bestaan van een inverse. Als men dichterbij de groep komt, kan men ook nog het bestaan van een eenheid postuleren, maar niet de inverse. Dan bekomt men een monoïde (MacLane - Birkhoff, MacMillan²: 'semi-groups and monoids'). Transformaties in de werkelijkheid die georganiseerd zijn volgens semi-groepen laten niets constant; zijn ze georganiseerd volgens monoïden dan zijn er wel transformaties die constant houden, maar, bij gebrek aan inversen, kan geen enkele transformatie worden gecompenseerd.

Als in de werkelijkheid een irreversibel worden bestaat dan moeten aspecten of/en delen ervan georganiseerd zijn volgens semi-groepen of/en monoïden.

Het is hier echter te vroeg om verder in te gaan op de relatie tussen variabiliteit en invariabiliteit en op de representatietheorie van semi-groepen of monoïden. Evenmin kunnen we hier ingaan op zogenaamde 'niet-invariantie' of dynamische groepen (Elliott-Dawber³). Het is voldoende te registreren dat zelfs al zijn we vrij zeker dat de werkelijkheid groepsstructuren moet realiseren (als ze gesloten, partieel constant én partieel variabel is) dan nog moeten ook semi-groepen en monoïden worden gerealiseerd. Hoe de relatie tussen de twee moet zijn blijft voorlopig een open vraag.

Na deze 'relativering' die echter het belang van groepen niet vermindert, wijzen we nog kort op de relatie tussen groepseigenschappen en sterkere postulaten.

1. Als iets bestaat volgt uit het feit dat het niet onmiddellijk vergaat dat het invariant moet zijn onder de representaties van zekere groepen (hoe klein ook).
2. De totaliteit van wat bestaat is invariant onder de 'maximale' groep G_T (wat men hier met maximaal bedoelt, staat ter discussie).

Twee opmerkingen zijn nodig.

- a. Wie de opvatting van totaliteit of zijn als (sterk geaccentueerd) worden aanhangt zal geneigd zijn van dat wat hij als het meest concrete beschouwt (de elementen voor de atomist, de totaliteit voor de holist) juist te ontkennen dat het invariant is op welke manier ook (en dus ook dat het invariant is onder de representaties van een groep). Zelfs dan zal men echter de 'abstracta' nodig om het radicaal concrete te benaderen, moeten karakteriseren als invariant onder de representaties van een groep.
- b. Sommigen zullen de elementen als invariant onder een maximale noemer beschouwen; anderen daarentegen het geheel (de delen zullen voor de laatsten als invariant onder subgroepen van G_T worden gezien, terwijl voor de eersten, grotere gehelen als invariant onder subgroepen zullen worden beschouwd). Deze opmerkingen stellen problemen die we nog open laten, mede omdat de relaties tussen groepen en subgroepen nog later ter sprake komt.⁴

² 1967, par.9, pp.61-64.

³ Elliott-Dawber 1979, K20, deel 20, pp.489-501.

⁴ Chillingworth registreert het verband tussen structurele stabiliteit en symmetrie. Hilbert, zowel als Wheeler, bespreken het verband tussen minimale actiebeginselen en de algemene relativiteit (GR) die een speciale vorm van symmetrie is. Symmetrieën zijn invarianties onder groepen. Dit betekent dat een stabiele wereld, zowel als een wereld die aan beginselen van minimale actie gehoorzaamt, volgens groepen moet zijn georganiseerd. Ieder worden, hoe sterk de variatie ervan ook is, veronderstelt op één of ander niveau een pad dat structureel stabiel is. Dus zal zelfs de meest dynamische wereldvisie toch ergens invariantie onder groepen als reëel bestaande eigenschap moeten invoeren.

I.3. De groep als uitdrukking van het subject of van het object?

Na Poincaré is in de Franse literatuur over wijsbegeerte van de wetenschap en na Weyl in de Duitse het belang van het groepsbegrip onderlijnd. Men kan in de meetkunde Gaston Bouligand en in de wijsbegeerte Abel Rey als voorbeeld noemen; in Jean Piagets werk (en in dat van de wiskundige wijsgeer Fernand Gonseth staat het ook centraal). Eddington in zijn 'Fundamental theory' zegt hetzelfde. In al deze gevallen - het lijkt ons belangrijk dat te onderstrepen - volgt men echter één of andere 'transcendentale deductie' in het kielzog van Kant.

Ofwel zegt men dat men de wiskundige bewijzen zoekt die invariant zijn onder zo groot mogelijke transformatiegroepen van premissen (Bouligand).

Ofwel zegt men dat de actor zijn omgeving, zijn instrumenten en zichzelf zo wil organiseren dat zij invariant zijn onder een zo groot mogelijke groep van transformaties (Abel Rey).

Ofwel zegt men dat men zijn meetinstrumenten zo zal organiseren dat ze die maximale invariantie bezitten (Arthur Eddington en Hugo Dingler).

Ofwel – het dichtst bij Kant - zegt men dat men zijn overtuigingssysteem zo zal organiseren dat men zoveel mogelijk omkeerbare deducties kan maken (d.w.z.: vanuit vele incompatibele hypothesen deduceren en vanuit prima facie reputaties eigen theorieën versterken) (Piaget en Weyl).

Alhoewel al die ideeën onder de inspiratie van Klein en Hilbert, Weyl e.a. ontstonden tonen ze toch hoe sterk de denker en de actor gezien worden als bepaald door de bestrijding van de tijd, het zoeken naar invarianten. Ons gaat echter niet in eerste plaats denker of actor, maar wel de werkelijkheid als geheel aan. Daarom is het nodig te onderstrepen dat wij het belang van de groep afleiden van het bestaan (niet onmiddellijk verdwijnend, stabiel en toch wordend) van een onafhankelijke werkelijkheid. Dit standpunt is volledig verschillend van de reeks die wij zojuist citeerden maar kan worden gebruikt om de verwantschap tussen werkelijkheid en mens (naast alle tegenstellingen) toch te beklemtonen.

De uiteenzetting die hier volgt heeft eigenlijk tot doel te argumenteren voor een ontologische en metafysische gronding van het groepsconcept.

1. *Zijn is oorzaak en gevolg zijn.* Iets is oorzaak in zoverre het, door en vanuit zichzelf, iets anders, buiten zichzelf, produceert. Oorzakelijkheid veronderstelt dus langs de ene kant overdracht (transmissie) van iets relatief constant, spanning (= asymmetrie) in de oorzaak die wordt opgeheven (symmetrisering) door de productie van het gevolg (het in context C_1 verliezen door de oorzaak van een deel van zijn relatief invariante eigenschappen die in context C_2 geheel of gedeeltelijk worden herwonnen). Doordat zijn causaliteit is (reële, transitieve productie door sommigen - valoriserend - creativiteit genoemd) zal al wat is noodzakelijk verschillende groepen realiseren.
2. *Zijn is systeem zijn.* Wat bestaat zijn georganiseerde gehelen waarvan de delen in constitutieve relaties staan die, als ze door interacties worden gewijzigd, zichzelf gedeeltelijk herstellen. Alle systemen realiseren dus groepen.
3. *De totaliteit van alles wat bestaat* (een maximaal geheel van zijnden dat zichzelf verklaart) wordt gekenmerkt door
 - a. $E(T,T)$: de totaliteit verklaart zichzelf;
 - b. $T+X=T$: de totaliteit is maximaal en volledig;
 - c. $(Ax)[(x \in T) \rightarrow E(T,x)]$: alle x , delen van de totaliteit, worden door de totaliteit verklaard. Als deze totaliteit zich wijzigt (en het is een centraal probleem te begrijpen hoe een zichzelf verklarende totaliteit zichzelf kan wijzigen) dan moet ze noodzakelijk een groep realiseren (vermits ze haar explicatief vermogen niet kan

verliezen en dus de grond moet zijn van haar eigen transformatie).

4. De werkelijkheid is georganiseerd volgens wetten. Wetten drukken relationele invarianten uit die bewaard blijven ook al variëren aspecten en delen van de werkelijkheid. Het feit zelf dat wetten steeds aanleiding geven tot irrealisme volgt uit het feit dat iedere wet de uitdrukking is van een invariantiegroep.

Deze zeer algemene stellingen (in dienst waarvan dit stuk is geschreven) zullen eerst kunnen worden verdedigd als we kunnen tonen (wat we hopen) dat de *speciale* groepen die we in de realiteit verwerkelijkt vinden (gereveleerd door de empirische wetenschappen) volgen uit het *oorzaak-zijn, het systeem-zijn en het een-zijn van de werkelijkheid zelf*. De ganse uiteenzetting in dit hoofdstuk is er één grote argumentatie voor. Stellen we een vraag als voorbeeld: boeit het ons of de groep D der verplaatsingen in de ruimte en tijd (D_1 en D_2), de groep R der wentelingen of rotaties (in ruimte, tijd, faseruimte), de groep M der spiegelbeelden (in ruimte, tijd, faseruimte) noodzakelijk volgen uit onze vier grondpostulaten. Wij menen van wel. Deze voorlopige vraag is uiterst grof en partieel natuurlijk.

We hebben noch tijd, noch lust om hier reeds te spreken over benaderde symmetrieën, over symmetriebrekingen (anders gezegd: benaderingen tot groepen, het opbreken van groepen in subgroepen, enz.).

Het is echter niet slecht om van het begin af de wijsgerige bedoeling duidelijk te maken en zo te verklaren *waarom* de redenen die hier het groepsbegrip noodzakelijk maken verschillen van de redenen die datzelfde begrip elders met succes deden gebruiken.

Voor wie tegenover zijnsleer en metafysica (of één van beide) zeer wantrouwig staat, willen wij toch nog eens herhalen dat wij in I.2. de noodzaak van het groepsbegrip hebben aangebracht *zonder* beroep te doen op de postulaten van I.3. waarvan de vruchtbaarheid hopelijk later zal blijken, maar die niet strikt nodig zijn voor het hier beoogde doel).

I.4. Subgroepen, productgroepen, klassen en werkelijkheid

1. Het aantal elementen van een groep is de orde van die groep. Als een deel van de elementen van een groep zelf de groepeigenschappen bezit, dan is dat deel een subgroep. Niet alle groepen zijn subgroepen van één grote groep. Toch vindt men in de subgroepenrelatie onmiddellijk een eenvoudig criterium voor het ordenen van groepen.

Als de werkelijkheid groepen *moet* realiseren, dan volgt uit de ‘groep - subgroeprelatie’ een ordeningscriterium voor de werkelijkheid zelf.

Een domein dat slechts invariant is onder de subgroep van een groep bezit, bij bepaling zelf, minder invariantie. Door interacties zal het gebeuren dat systemen die geïsoleerd invariant waren onder grotere groepen, wel niet al hun invariante eigenschappen verliezen maar slechts nog invariant zijn onder subgroepen.

Dat de orde van een subgroep steeds een deler is van de orde van de groep is een mooie maar metafysisch niet direct belangrijke stelling.

2. Wel belangrijk nadat de reeks der subgroepen het middel gegeven heeft om een ‘graad van invariantie’ te bepalen is de isomorfie van groepen. Twee groepen zijn isomorf als een één-eenduidige betrekking kan worden bepaald tussen de elementen van beide zo dat geldt:

als $G_a G_b = G_c$ in G , dan geldt, als G_a , G_b en G_c respectievelijk afgebeeld zijn op H_a , H_b en H_c in H , dat $H_a H_b = H_c$.

Als de eigenschap geldt maar de relatie niet één-eenduidig is, dan bestaat een homomorfisme.

Door homomorfisme en isomorfisme kan men, in de werkelijkheid, de vormen van

- invariantie die de verschillende domeinen karakteriseren, met elkaar *vergelijken*. 1. geeft ons een ontologisch ordeningsbeginsel; 2. een ontologisch vergelijkingsbeginsel.
3. Niet alleen groepen kunnen met elkaar worden vergeleken, maar ook elementen van groepen. Voor ons doel volgt daaruit dat niet alleen de invarianten kunnen worden vergeleken, maar ook de transformaties zelf.

Een element G_a van een groep is geconjugeerd met een element G_b als een element G_n bestaat, zó dat

$$G_a = G_n G_b G_n^{-1}$$

Om het metafysisch belang van conjugatie duidelijk te maken volgt een voorbeeld. Laat een rotatie $R_k(a)$ een rotatie zijn over een hoek a rond een as k . Laat R een willekeurige rotatie zijn. $RR_k(a)$ zal de as k een rotatie R laten uitvoeren.

De uitdrukking $RR_k(a)R^{-1}$ roteert eerst (R^{-1}) de as tot zijn eerste positie, voert dan een rotatie van hoek a rond k uit en verplaatst (bepaling van R) de as k tot de nieuwe positie. Dus zal $RR_k(a)R^{-1} = R_k'(a)$ zijn. $R_k(a)$ en $R_k'(a)$ zijn hierbij twee speciale voorbeelden van geconjugeerde groeps-elementen (hier gekozen uit de groep der rotaties). Twee geconjugeerde transformaties zijn eigenlijk dezelfde transformaties dus (hier de rotaties over a) die op verschillende objecten worden uitgevoerd (hier rond verschillende assen).

Indien er geen geconjugeerde transformaties zouden bestaan in de werkelijkheid, dan zouden er geen natuurlijke klassen van transformaties voorkomen. Want de conjugatierelatie is reflexief, symmetrisch en transitief en bepaalt dus (door zijn abstractie) de klasse van alle groeps-elementen die zijn geconjugeerd met een gegeven element. De klassen laten toe soorten variaties of transformaties in te voeren.

Resumerend volgt uit 1, 2 en 3 dat er graden van invariantie zijn, soorten van invariantie en soorten van variatie. Het is een mathematisch feit dat groepen subgroepen, homomorfen en geconjugeerde elementen hebben. Het is een ontologisch-metafysisch feit dat de werkelijkheid een groepsstructuur *moet* hebben en delen (respectievelijk aspecten) die verschillende graden van invariantie bezitten, verschillende soorten van invariantie en verschillende soorten van transformatie. Een groep waarin ieder element met zijn eigen klasse samenvalt is mogelijk (b.v. iedere abeliaanse groep). De werkelijkheid in haar geheel kan *niet* door zulke groepen worden beschreven. Het is ook mogelijk groepen te hebben die alleen zichzelf als subgroep hebben (of de lege groep). De werkelijkheid kan door zulke groepen niet worden voorgesteld.

Als een groep G_1 twee subgroepen G_2 en G_3 bevat waarvan respectievelijk H_x en K_y de elementen zijn en als

1. $H_x K_y = K_y H_x$ voor alle paren van elementen uit G_2 en G_3 en
2. ieder element van G_1 kan worden geschreven als $H_x K_y$ (voor een gegeven keuze van x en y) dan is $G_1 = G_2 \times G_3$ het direct product van zijn twee subgroepen.

Intuïtief hebben de transformaties van de subgroepen van een product geen invloed op elkaar.

Als de maximale groep der transformaties van de werkelijkheid kan worden voorgesteld als een product is de werkelijkheid niet maximaal holistisch maar bevat soorten transformaties met karakteristieke invarianten (in de subgroepstructuur uitgedrukt) die elkaar niet beïnvloeden.

Na een relatie te hebben gelegd tussen de abstracte groepsstructuur en de werkelijkheid op zichzelf genomen blijkt dat, hoe belangrijk de structuur *op zichzelf* ook is (vermits ze de idee van invariantie door en in variatie formeel realiseert), haar wijsgerig belang toch volgt door dat *wat* de groeps-elementen doen ondergaan *aan* gegeven objecten.

Tot nu toe hebben we aan die soorten objecten alleen die restricties opgelegd die volgen uit het feit dat ze bestaan en behoren tot de totaalwerkelijkheid. Herman Weyl noemt de effecten van de

groepselementen dan verwerkelijkingen.⁵ Men kan echter ook meer speciale eisen stellen: in wetenschappelijke toepassingen van de groepentheorie zullen de transformaties in het algemeen lineaire transformaties van vectoren in een lineaire ruimte zijn. Dit lijkt direct een zeer speciale structuur. Voor we de band tussen groepen en lineaire transformaties op lineaire ruimten wijsgerig bespreken, moet de soort restrictie die in de lineaire ruimte ligt zelf worden ingeschat. Dat gebeurt bij Wigner en Weyl in hun eerste hoofdstukken en in het handboek van Elliott-Dawber in het derde hoofdstuk.

Weyl-groepen theorie

Het domein waarin een algemene symmetrieëentheorie ontwikkeld geworden is, blijft vrij speciaal: de n -dimensionale vectorruimte. Het is een domein dat specialer is dan de algemene differentiaalgeometrie of de theorie der menigvuldigheden. Toch is het voldoende voor KM. Elders vertrekken we van menigvuldigheden.

Onze bedoeling is

1. metafysica en unitaire meetkunde, zowel als groepentheorie met elkaar in verband te brengen
2. zodat de symmetrieën van de KM een metafysische interpretatie krijgen.

I. Unitaire meetkunde

Laat een vector in een n -dimensionale ruimte een geordende reeks van n getallen zijn waarvoor een groep optellings- en een groep vermenigvuldigingsaxioma's gelden.

1. optelling
commentativiteit, associativiteit, uniciteit van ver x als (een x , waarvoor $a+x=b$ voor iedere $a-b$)
2. product
associatief, eenheid ($2a=a$); links en rechts distributief
3. er zijn ten hoogste n lineair onafhankelijke vectoren ($a_1...a_n$ zijn lineair onafhankelijk dan en dan alleen als geen $c_1a_1+c_2a_2...c_na_n=0$ met $c_i \neq 0$ bestaat).

Iedere collectie van lineair onafhankelijke vectoren vormt een basis. *Geen van die basissen is geprivilegieerd.* Dit is de justificatie van het gebruik van vectorruimten.

1. De Peano axioma's justificeren het gebruik van getallen: alle ordeningen die afbeeldbaar zijn op ... zijn volledig. Als alle werkelijke systemen meetbaar zijn, kunnen ze worden geplaatst in volledige geordende reeksen.
2. Dat men vectoren nodig heeft volgt uit het feit dat men meer dan één reeks nodig heeft om de systemen te situeren.
3. De vectoraxioma's kunnen ook worden gerechtvaardigd: communicativiteit en associativiteit drukken de relatieve autonomie ten opzichte van elkaar van de geordende systemen uit (en hun combineerbaarheid).

De productregels drukken uit dat ook de reeksen die de vectoren zijn *weer kunnen worden geordend*. Zekere eigenschappen van de *affine* (= de vector) ruimte, zijn metafysisch belangrijk:

1. Soms kan men R in R_1 en R_2 *ontbinden* $R=R_1+R_2$, als iedere vector in R zich op één en slechts één manier uit vectoren van R_1 en R_2 laat schrijven.
2. Als het verschil tussen twee vectoren in R' ligt, zijn x en y *congruent modulo R'* . De

⁵ Weyl 1928, p.102 e.v.

vectoren congruent modulo R' vormen weer een vectorruimte, met $(n-n')$ dimensies (door projectie), waar n' het aantal dimensies van R' is.

3. Als een reeks vectoren uit 1. door multiplicatie volgen liggen ze op dezelfde *straal*.

Door 1. kan een in een vectorruimte voorgesteld heelal in deeldomeinen ontleed worden; door 2. kan men abstractie maken van bepaalde soorten verschillen; door 3. kan men richtingen beschouwen zonder normen of waarden. 1. fundeert een sterke deelrelatie; 2. een sterke aspect- of laagrelatie.

Men kan de vectorruimte R op zichzelf afbeelden op vele manieren. De afbeeldingen van R in R die ax en $x+y$ behouden (d.w.z. die de fundamentele bewerkingen van de vectorruimte niet wijzigen) zijn geprivilegieerd; het zijn de automorfismen van R (de *affine* ruimte).

Een basiselement e gaat in e' over door

$$e'_k = \sum_i a_{ik} e_i$$

In de KM noemt men lineaire afbeeldingen van R in R operatoren.

Het is belangrijk te begrijpen dat steeds weer dezelfde constructie wordt toegepast: men telt vectoren op zoals getallen. Nu zal men op afbeeldingen van vectoren op elkaar ook de basisbewerkingen gewijzigd toepassen.

1. Van twee afbeeldingen is $(BA)_x = B(A(x))$ het product (associatief; niet commutatief) -1 is de identische afbeelding; een afbeelding is slechts omkeerbaar (heeft een inverse) als verschillende vectoren op verschillende vectoren blijven afgebeeld (dan is de $\det \neq 0$) en dan bestaan inversen.
2. Men vormt ook de som. Laat Ax in x_1 , Bx in x_2 omzetten, dan zal $(A+B)x$, x in x_1+x_2 omzetten.
 $(A+B)x = (Ax) + B(x)$.
3. (aA) zet x om in $a(Ax)$.

Men kan ook ruimten van verschillende dimensies op elkaar afbeelden.

Een afbeelding is een overgang van een ordening van de werkelijkheid naar een andere ordening; een epistemische en geen ontologische relatie, die echter wel een ontologische basis kan hebben. Vermits wetten invariante eigenschappen van de werkelijkheid zijn is het belangrijk alle soorten invarianten te zoeken. We hebben al de automorfismen-invarianten. Daarnaast komen er nog invarianten van een andere soort. Als R' een n' -dimensionale deelruimte van R is dan laat afbeelding A , R' invariant als alle A afbeeldingen van vectoren in R' weer in R' liggen. Als $R = R_1 + R_2$ en als AR_1 en R_2 invariant laat, vervalt A in $A(R_1)$ op R_2 , $A(R_2)$ op R_2 . Als vectoren A in A' overgaan door omkeerbare S $A' = S^{-1}AS$, dan moeten uitdrukkingen worden gevonden die dezelfde waarden hebben voor A' en A .

x als component van $\underline{x}$ moet voldoen aan: vindt een vector $x \neq 0$ die door A in een veelvoud van zichzelf wordt omgezet.

$$Ax = lx \text{ (anders: } lx, x=0 \text{ (} lI - A)x = 0 \text{)}.$$

Spoor en Norm zijn zulke invarianten (puur formeel). Een functie $L(x)$ van de vorm $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ (een lineaire vorm) is invariant ($L(ax) = aL(x)$, $L(x+y) = Lx + Ly$, a_i en x_i kunnen beide ofwel als constanten, ofwel als variabelen worden aanzien).

Neem voor iedere ruimte R , een ruimte P , zodat vectoren van R en P , een product vormen ($\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \dots + \xi_nx_n$).

Twee afbeeldingen zijn contragrediënt ($Ax' = x$, $A\xi' = \xi$) als $\xi_1x_1 - \xi_nx_n$ en $\xi_1'x_1' + \dots + \xi_n'x_n'$ invariant blijven onder A en A' . Als die producten nul zijn, is involutie voorhanden. De duale ruimte P heeft de eigenschap dat niet iedere transformatie in R , de contragrediënte in P uitgevoerd wordt op de lineaire vorm.

De getransformeerde of duale matrix A ontstaat door substitutie van kolommen en lijnen.

Voor x in R , n in ξ (duale ruimten) geldt $(Ax.n)=A*n.x$. Met iedere afbeelding komt een matrix overeen.

Matrix/vector=vector/getal (tensormatrix?).

Of de duale vectorruimte metafysisch kan worden geïnterpreteerd weet ik nog niet.

In ieder geval: dat het mogelijk en noodzakelijk is bepaalde delen van de werkelijkheid in *affine* meetkunde af te beelden heeft het metafysische belang dat we zojuist zagen (zie pp. ...).

We zagen al dat (door het product) de vectoren zelf kunnen worden geordend. Om ze volledig te ordenen moeten we ze een bedrag (een norm) toekennen.

In de euclidische meetkunde is $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

Als getallen neemt men de complexe omdat alleen daar de vier hoofdbewerkingen onbegrensd kunnen worden uitgevoerd ($2+$ hun inversen, met macht en inverse $-\sqrt{}$).

Om x^2 definitief te houden zal men $x^2 = x_1 \bar{x} + x_2 \bar{x} \dots x_n \bar{x}_n$ (hermiteaanse eenheid). Ook voor het product $xy = \bar{x}y_2 + \bar{x}y_2 + \bar{x}y_n$. Een coördinatiesysteem is normaal als de hermiteaanse vorm het bedrag geeft. Unitaire transformaties houden dit bedrag invariant.

- Als
1. men vectoren invoert (I- we zagen waarom)
 2. men ze volledig wil ordenen (II - hun normen en de motieven om dat te doen zijn dezelfde als in I)
 3. men het kleinste domein als getaldomein wil nemen waarin de vier hoofdbewerkingen onbegrensd toepasbaar zijn.

De ontologische justificatie voor III is weer de volledige ordening. *Dan moet men hermiteaanse bedragen invoeren én unitaire transformaties.*

Dan $|\det S|^2 = 1$ en (equivalent) $\bar{S} * S = \underline{1}$ en $S \bar{S} = \underline{1}$ (dit zal voor KM belang hebben). In een unitaire ruimte R valt de geconjugeerde $\bar{R}$ met de duale samen.

Hoofdassentransformatie

Vindt voor Ax , de l zo dat $Ax=lx$.

Infinitesimale unitaire afbeeldingen zijn noodzakelijk om continue rotaties van systemen te kunnen uitvoeren. De rotaties wijzigen de interne relaties van systemen niet en ook niet hun externe relaties differentieel. Ze wijzigen ze wel globaal (interne delen en externe delen liggen niet meer in dezelfde stralen). Op ogenblik $\bar{i}$, op punt $P(x_1 x_2 x_3)$, gebeurt $dx_1 dx_2 dx_3$ met

$$\dot{x}_i = dx_i / d\tau = \sum_k c_{ik} x_k \quad (c_{ik} \text{ constant, onafhankelijk van } P) \quad c_{ki} = -c_{ik}.$$

Een infinitesimale unitaire afbeelding in R_n wordt ingevoerd voor een kleine, eindige tijd τ .

$$d\bar{x}/d\tau = c_{\bar{x}} \quad dx_i/d\tau = \sum_k c_{ik} x_k.$$

Als het coördinatensysteem normaal en de afbeelding unitair is, moet $\sum_i \bar{x}_i x_i$ onveranderd blijven

$$\sum_i \bar{x}_i dx_i / d\tau + \sum_n x_k d\bar{x}_k / d\tau = 0 \quad (1).$$

Als $dx_i / d\tau = \sum_k c_{ik} x_k$ $d\bar{x}_k / d\tau = \sum_i \bar{c}_{ki} \bar{x}_{ki}$ dan $\sum_k (c_{ki} + \bar{c}_{ki}) \bar{x}_k x_k$ is de linkerzijde van (1). In het complexe domein hangt de snelheid $d\Sigma/d\tau$ met x samen door het product van een hermiteaanse

afbeelding met $\sqrt{-1}$.

Door iteratie van infinitesimverschuivingen doorloopt $U(\tau)$ alle afbeeldingen van een éénparametergroep van unitaire transformaties, gegenereerd door infinitesim.

$$U(\tau + \tau') = U(\tau)U(\tau').$$

Dit introduceert de he-groepen. We zagen reeds waarom he-groepen nodig waren.

I.5. Vectorruimten, lineaire transformaties en de werkelijkheid

Ruimten hebben een eindig of een oneindig aantal dimensies. Als men in een ruimte een coördinatiestelsel invoert, kan met de verschillende punten getallen van verschillende soorten doen overeenkomen. Een vectorruimte zal dus ook complex of reëel zijn, eindig of oneindig dimensionaal. De ruimte van de klassieke mechanica is eindig dimensionaal en reëel. Zelfs als men niet de 'natuurlijke' drie- of vierdimensionale ruimte invoert, maar een 'faseruimte' (waarvan de coördinaten geen plaatsen maar grondeigenschappen van de elementen weergeven) is - behalve in thermodynamica) die ruimte zo. In de kwantummechanica echter is de ruimte oneindig dimensionaal en complex (de zgn. Hilbert-ruimte). In een artikel 'The mathematical structure of elementary quantum mechanics' heeft Jozef M. Jauch⁶ een korte samenvatting gegeven van de redenen die daartoe voeren. Als we de relatie (en zelfs de *noodzakelijke* relatie) van de werkelijkheid met een complexe en oneindige dimensionale Hilbert-ruimte willen begrijpen, worden we onmiddellijk met dit fundamenteel probleem geconfronteerd (dat, zoals Jauch zelf zegt op p.311) diep inzicht geeft. We zullen er dan ook dadelijk op terug komen. Elliott en Dawber bepalen vermoedelijk met het oog op de noodzaak van complexe getallen in kwantumtheorie het algemeen begrip lineaire vectorruimte, onmiddellijk door verwijzing naar complexe getallen ("a set r_1, r_2 is said to form a linear vector space L if the sum of any two members produces another in the set and if multiplication by a complex number c also produces another in the set. If c is restricted to be real, the space is called real"⁷). H. Weyl in zijn 'Unitäre Geometrie'⁸ voert de begrippen op een meer algemene manier in. Om deze formele begrippen met de werkelijkheid te vergelijken op een manier die *niet* direct aan een oneindig dimensionale en complexe ruimte bindt, passen wij eerst Weyls bepaling toe (die algemener is).

Een vector in een n dimensionale ruimte is een reeks getallen $(x_1, \dots, x_n)$ die kan vermenigvuldigd worden met een getal en opgeteld met andere vectoren: $a\underline{x} = (ax_1, \dots, ax_n)$ $\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ ($\underline{x}$ en $\underline{y}$ stellen vectoren voor).

De optelling en vermenigvuldiging voldoen aan de volgende voorwaarden:

Optelling:

1. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (commutatief)
2. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ (associatief)
3. Voor alle $\underline{d}$ en $\underline{c}$ bestaat één en één enkel $\underline{x}$ zo dat $\underline{a} + \underline{x} = \underline{c}$ $\underline{x} = \underline{c} - \underline{a}$: het verschil (de aftrekking is mogelijk).

Vermenigvuldiging:

- $-(a+b)\underline{x} = (a\underline{x}) + (b\underline{x})$ (eerste distributieve?)
- $a(\underline{x} + \underline{y}) = (a\underline{x}) + (a\underline{y})$ (tweede distributieve?)
- $a(b\underline{x}) = (ab)\underline{x}$ (associatief)
- $1\underline{x} = \underline{x}$.

Een groep vectoren is lineair onafhankelijk als er geen relatie tussen hen bestaat van de volgende vorm: $c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 + \dots + c_h\underline{a}_h = 0$ (tenzij $c_1 = c_2 = \dots = c_h = 0$).

⁶ Dirac-volume, pp.300-319.

⁷ Elliott-Dawber 1979, p.25.

⁸ Weyl 1928, KI.

h -vectoren bepalen een h -dimensionale lineaire deelruimte R' waarvan alle vectoren $\underline{x}$ de vorm hebben van $\underline{x} = z_1 \underline{a}_1 + z_2 \underline{a}_2 + \dots + z_h \underline{a}_h$.

Iedere groep van h -vectoren die lineair onafhankelijk zijn kunnen als een basis of coördinatensysteem voor R dienen. Voor de totaalruimte R bestaat een (in het algemeen vele) basis die ten hoogste n lineair onafhankelijke vectoren heeft als n de dimensie van R is.

Alle vectoren kunnen in termen van iedere basis worden uitgedrukt.

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n.$$

Men kan van één basis naar een andere overgaan door de transformatie

$$x_i = \sum_k a_{ik} x'_k \quad (\text{waar } x \text{ de componenten van } \underline{x} \text{ in basisvectoren zijn}).$$

Deze relatie tussen x en x' is een lineaire afbeelding (of transformatie of operator) die iedere vector van L op een vector van L afbeeldt: $T\underline{x} = \underline{x}'$.

$$T \text{ is lineair als } T(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = T\underline{x}_1 + T\underline{x}_2 \quad (1)$$

$$T(c\underline{x}_1) = cT\underline{x}_1 \quad (2).$$

Het zal blijken dat bijna (*niet* alle!) alle transformaties die de elementen van de groepen representeren waaraan onze natuurkundige werkelijkheid voldoet, lineair zijn.

Noodzakelijk is dat niet.

1. $T(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = T\underline{x}_1^* + T\underline{x}_2^*$ (waar $*$ de complex geconjugeerde voorstelt) is voor spiegelingen nodig.
2. Denkbaar is bovendien dat $T(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = F(T\underline{x}_1, T\underline{x}_2, z)$ is waar de getransformeerde ook wel van de oorspronkelijke vectoren afhangt maar op een niet nader gespecificeerde manier (F !) en bovendien niet *alleen* van de oorspronkelijke vectoren maar ook van andere termen (z !).

Men kan niet ontkennen dat deze veralgemening zo diffuus is dat ze weinig interessante eigenschappen zal hebben. Men kan echter als tussengevallen $T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = F(T\underline{x}_1, T\underline{x}_2)$ (zonder z) invoeren en zelfs voor F nog restricties opleggen (b.v. monotone e.a.). Een lineaire transformatie is dus zeker een zeer speciale. Eens we haar zeer particulier karakter opmerken, blijkt ook een lineaire ruimte zelf zeer particulier. Ze is trouwens particulier op dezelfde manier waarop lineaire transformaties particulier zijn:

1. alle vectoren erin zijn uitdrukbaar, *alleen* door optelling en vermenigvuldiging, in termen van basisvectoren die een echte deelverzameling van de verzameling der vectoren zijn, en
2. de basisvectoren zijn lineair onafhankelijk van elkaar.

Wat in de werkelijkheid maakt de voorstelling van toestanden door vectoren, van gebeurtenissen door lineaire operatoren en van het overgaan van één model naar een ander door lineaire operatoren mogelijk of zelfs - onder bepaalde voorwaarden - noodzakelijk?

Weer opnieuw zouden we - zoals we bespraken in de analyse van de relatie tussen groepen en werkelijkheid - van sterke postulaten kunnen vertrekken: de werkelijkheid als systeem, als oorzakenetwerk, als georganiseerde eenheid, als zichzelf verklarende totaliteit zouden onze uitgangspunten kunnen zijn.

Ofwel zouden wij ook simpel van de coëxistentie van invariantie en variabiliteit kunnen uitgaan.

Vectoren worden opgeteld en vermenigvuldigd op maximaal eenvoudige manier: door de componenten ervan die met elkaar corresponderen onafhankelijk op te tellen en te vermenigvuldigen. De ontbindbaarheid van gebeurtenissen, toestanden en systemen die door vectoren voorstelbaar zijn is daardoor gemaximaliseerd. Vectoren realiseren de triomf van de analytische methode: complexe systemen kunnen worden opgebouwd door het 'piecemeal'

(stuksgewijs) aan elkaar verbinden van de deelsystemen van die systemen, deeltoestanden van die toestanden, deelgebeurtenissen van de gebeurtenissen.

Als de ruimte van een systeem de verzameling van zijn mogelijke toestanden is, en als ieder van de toestanden door een vector die vanuit de oorsprong vertrekt kan worden gekarakteriseerd dan volgt daaruit dat die toestanden gekarakteriseerd worden door veranderlijken die onafhankelijk van elkaar variëren (juist zoals we in een gewoon assenstelsel ons op één van de assen kunnen bewegen zonder op andere assen van plaats te veranderen als de assen orthogonaal zijn).

De deelbaarheid van de werkelijkheid, haar geledingen, de onafhankelijke variabiliteit erin komen tot uiting in de mogelijkheid haar voor te stellen door een lineaire ruimte en haar veranderingen door lineaire operatoren. Een werkelijkheid waarin constanten en veranderlijken voorkomen, in verschillende soorten en graden, moet gedeeltelijk door lineaire ruimten en operatoren kunnen worden voorgesteld.

Nochtans staan we hier voor een reëel probleem. Een systeem is in het algemeen niet lineair. Een oorzakelijke relatie evenmin. De werkelijkheid als zichzelf verklarende totaliteit zeker niet. En terwijl vele wetten door lineaire vergelijkingen worden uitgedrukt, worden andere zeker niet door lineaire vergelijkingen weergegeven. Dit alles drukt slechts uit dat de werkelijkheid niet atomistisch en partieel holistisch is opgebouwd. Op welke manier kunnen we tegelijk met die twee verschillende aspecten ervan rekening houden?

Het probleem blijkt moeilijk! Onbekend is het niet. Ook variabiliteit en invariantie coëxisteren. Ook daar - hoewel? - hebben we de spanning al aangekondigd als we over groepen en semi-groepen spraken. Hier hoeft het ons evenmin te verwonderen dat de werkelijkheid evengoed een los aggregaat als een strakke organische totaliteit kan zijn. In het ene geval was het bestaan van systemen niet mogelijk, in het ander geval was het bestaan van deelsystemen uitgesloten. Puur mechanische juxtapositie van de twee gezichtspunten draagt niet bij tot begrijpen. We moeten ze sterker met elkaar verbinden. Dat gebeurt op verschillende manieren:

1. Vitale en anderen tonen (na Chillingworth e.a.) in detail (in 'Dynamical systems')⁹ dat op willekeurige menigvuldigheden vectorvelden kunnen worden opgebouwd.
2. In lineaire ruimten kunnen niet lineaire transformaties worden bepaald.
3. Op verschillende niveaus van de werkelijkheid kunnen verschillende graden van niet lineariteit worden uitgevoerd.

Later komen wij hierop terug.

Voorlopig kunnen wij met zekerheid zeggen dat als we invarianten *en* variatie willen in de werkelijkheid, ze een zekere graad van interne pluraliteit moet vertonen die het mogelijk maakt ze te benaderen door lineaire ruimten en lineaire transformaties.

Dat de overgang van een coördinatenstelsel naar een ander in en voor een lineaire ruimte zelf door een lineaire operator wordt uitgevoerd volgt uit de omschrijving van lineaire ruimte, coördinatenstelsel en lineaire operator zelf. Die overgang is geen gebeurtenis in de externe wereld maar wel in ons representatiesysteem ervoor. Blijkbaar - juist zoals voor de toepasbaarheid van het groepsbegrip - zijn de afbeeldingen die in de objectieve wereld processen voorstellen ook soms toepasbaar op transformaties binnen de subjecten.

Wel mag de analogie niet worden overdreven: kennisverwerving kan geen lineair proces zijn.

I.6. Complexe getallen en werkelijkheid:

onherleidbare tralies en de automorfismengroepen van systemen als uitdrukkingen van de eenheid van de reacties

⁹ Vitale et al.

Tot nu toe - zoals aangekondigd - werden geen eigenschappen gebruikt van de getallen die de vectoren samenstellen. In abstracto zal iedereen die een domein volledig wil ordenen er getallen mee willen laten overeenkomen waarvoor men de vier hoofdbewerkingen zonder restricties kan uitvoeren. Men weet dat $n-m$ (waar $n=m$) tot zero dwingt en waar $n < m$ tot negatieve getallen. Men weet ook dat met $=$, $-$, $\times$ en $:$, de machtsverheffing en de worteltrekking (elkaars inversen) samengaan. $1:3$ verplicht tot niet eindigende breuken (reële getallen) $|2$ tot irrationele getallen, $|-n$ tot imaginaire en complexe getallen. Een bekende stelling spreekt uit dat men in het domein van de complexe getallen - en daar alleen - de vier hoofdbewerkingen zonder restricties kan uitvoeren zonder verplicht te zijn nieuwe getalsoorten te introduceren (i en $|i$ zijn geen nieuwe getallen¹⁰). Verder is geen uitbreiding mogelijk! Het is dus redelijk als men aan vectoren een numerieke waarde wil toekennen, die waarde in de meest volledige getalruimte te kiezen: in die der complexe getallen.

Men weet dat als $x+iz$ (waar x en z reële getallen zijn, en $i=|-1$ een imaginair getal) een complex getal is, $x-iz$ het daarmee geconjugeerde complexe getal weer geeft. Laat voor een complex getal c , $\bar{c}$ eraan geconjugerd zijn. Men zal met de vector $(\underline{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n))$ het bedrag $x_1 + x_1 + x_2 x \dots x_n x \bar{x}_n$ doen overeenkomen.

Dat de vectoren nodig om de werkelijkheid te beschrijven kunnen worden genormeerd door complexe getallen is niet de uitdrukking van een opportunistische optie, maar geeft een intrinsieke eigenschap van de werkelijkheid weer. Waarom is de werkelijkheid gestructureerd?

Verschillende antwoorden zijn mogelijk en geen van allen is triviaal. Drie zullen worden vermeld, van tamelijk oppervlakkig naar zeer diep.

1. Getallen zijn syntheses van orde en classificatie. Die werkelijkheid vertoont de hoogste graad van orde die door het meest gesloten en volledig getallensysteem kan worden voorgesteld. Het complex getallensysteem is het meest volledige en geslotene. De werkelijkheid is een maximaal ordelijk systeem. Dus moet ze worden voorgesteld in en door complexe getallen.
2. In Feynmans 'Lectures on physics'¹¹ worden complexe getallen ingevoerd om de formule te kunnen uitdrukken die algebra en meetkunde volgens Feynman 'eenmaakt'. De formule drukt exponenten van getallen uit in functie van sinussen en cosinussen van hoeken (de linkerzijde van de formule drukt typisch algebraïsche grootheden uit, de rechterzijde typisch geometrische)

$$e^{i\Theta} = \cos\Theta + i\sin\Theta.$$

Algebra drukt discontinue, meetkundig, continue grootheden uit. Zoals we later zullen zien moet de werkelijkheid er in relatie twee bevatten. Als deze relatie als vooropstelling complexe getallen heeft zijn ze daardoor gerechtvaardigd. Het is in de studie van oscillerende systemen (symmetrieën in de tijd) dat complexe getallen in de natuur nodig blijken omdat een getal als 10^{is} een *periodische functie* is. De formule is eenvoudig, algemeen en belangrijk. De tweede rechtvaardiging gaat al dieper.

3. De derde rechtvaardiging eist heel wat voorbereiding en kan slechts worden geschetst. Wijsgerig zowel als wetenschappelijk is ze het diepst. J.M. Jarick¹² toont dat de noodzaak complexe getallen te gebruiken uit de interactie van een speciale groep (de Poincaré-groep) en een speciale lineaire ruimte (de Hilbert-ruimte) voortkomt. Om dat te

¹⁰ Feynman, 22.8.

¹¹ Feynman et al 1963, deel I, K22.

¹² J.M. Jauch in 'Projective representation of the Poincaré-group in a quaternionic Hilbert space', Loebbl, VI, pp.131-181 en in 'The mathematical structure of elementary quantum mechanics', Dirac Vol.

doen vertrekt hij van ‘The lattice structure of general quantum mechanics’¹³ en ‘The group of automorphisms in a proposition system’. De eigenlijke deductie eist, na die algemene uitgangspunten, eigenschappen van de speciale groep (Poincaré) en speciale ruimte (Hilbert) die we later nog zullen ontmoeten en die we hier slechts doorlopen. De aanvang van de deductie is echter van een zo grote algemeenheid dat ze zelfs het speciale kader van de kwantummechanica te buiten gaat en een voorlopige integratie van het constant-variabel karakter van de werkelijkheid met het ontbindbaar karakter ervan realiseert (door de speciale keuze van de norm voor vectoren in lineaire ruimten te laten afhangen van groepen).

Men kan de basis van Jauchs deductie direct metafysisch vertalen. Dit gebeurt in wat volgt.

Laat de werkelijkheid uit een veelheid van systemen bestaan. Sommige onder hen kunnen in interactie met andere deelsystemen slechts in een beperkt aantal stabiele toestanden eindigen. Dat dit zo is, en dat het dus vals is dat alle deelsystemen van de werkelijkheid na interactie zich ofwel destabiliseren, ofwel in een continue oneindigheid van toestanden die overlappen eindigen, volgt uit het constant en ontbindbaar zijn van de werkelijkheid zelf: dit wordt hier niet getoond maar verondersteld.

Als de systemen S_M (veralgemeende meetinstrumenten) deze eigenschap hebben kan men - zonder verlies - hun mogelijk aantal toestanden tot 2 beperken. Ja-neen vragen worden beantwoord door zulke interacties. De antwoorden komen overeen met de voordelen van een theorie T . Op T is een *partiële* orde bepaald (de implicatie). De orde is slechts partieel. Dit is hoogst belangrijk omdat, indien dit niet het geval zou zijn, geen niet triviale symmetriegroepen voor oordelen bestaan.

Dat de werkelijkheid zo is dat sommige oordelen (i.e. resultaten van ja-neen interacties) andere niet identische oordelen impliceren volgt gedeeltelijk uit het complex en geordend karakter van S_M en S_O , gedeeltelijk uit hun stabiliteit. Ook dat wordt verondersteld en niet afgeleid.

Dat de orde *niet* volledig is volgt uit de toepasbaarheid van groepen op de werkelijkheid. Men kan ook, uit de natuur van de werkelijkheid in haar geheel, en van de S_M systemen, afleiden dat voor iedere deelverzameling a_i van T , een

grootste benedengrens, die alle x in a_i impliceert, en een
kleinste bovengrens die door alle x in a_i wordt geïmpliceerd,

bestaat. Daaruit volgt dat dit ook voor T (zelf ook deelverzameling?) geldt.

Ook een complement dat voldoet aan

$a''=a$, $a' \cap a=0$, $a \subseteq b \leftrightarrow b' \subseteq a'$ bestaat.

Dit alles wordt niet afgeleid. We nemen alleen stelling door te zeggen dat deze beweringen niet gelden voor alle mogelijke werelden, maar voor onze werkelijke wereld, en dat niet om logische, maar om ontologisch-metafysische redenen. Systemen waarvan de theorieën door interacties met S_M zijn opgebouwd zijn van twee soorten:

1. T is een distributief netwerk
 $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
 $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$.
 Dan is T een booleaans netwerk.
2. T is een zwak modulair netwerk indien, als a b impliceert, a en b compatibel zijn. Twee oordelen zijn compatibel als ze samen meetbaar zijn. Met andere woorden: als de S_M interactie die tot de bevestiging (respectievelijk ontkenning) van a leidt tegelijk of in volgorde op hetzelfde systeem kunnen worden uitgevoerd.

¹³ pp.135-141.

Het is *onmogelijk* te veronderstellen dat alle oordelen incompatibel zijn. Indien dit het geval zou zijn dan zou iedere meting, iedere andere meting onmogelijk maken (i.e. de S_M ofwel destabiliseren ofwel in met S_M omzetten). Dit is onverenigbaar met de opsplitsbaarheid en relatieve constantheid van de werkelijkheid.

Het is *ook onmogelijk*, dat alle oordelen compatibel zouden zijn (niettegenstaande de klassieke wetenschap dit veronderstelt). Indien dit het geval zou zijn dan zouden de S_M -interacties nooit de S_O of de S_M destabiliseren. Dit zou een minimale integratie van de werkelijkheid en een maximale oppervlakkigheid van de S_M -interacties veronderstellen. Deze afleiding is niet voldoende, maar toont slechts de richting waarin men gaan kan.

De zwakke modulariteit zegt dat als uit de waarheid van een oordeel, een ander oordeel volgt, de twee tegelijk meetbaar zijn. Het is een tautologie als alle oordelen meetresultaten uitdrukken (extreem empirisme). Inderdaad, in dat geval kan na het vaststellen van a 's waarheid, die van b slechts worden vastgesteld als de twee metingen op hetzelfde systeem kunnen worden uitgevoerd. Echter het extreem empirisme is onjuist: ware en informatieve oordelen die geen waarnemingsoordelen zijn kunnen worden geformuleerd. Zelfs voor hen geldt echter dat ze slechts waarnemingsoordelen kunnen impliceren of erdoor worden geïmpliceerd als wat ze impliceren of waaruit ze volgen in beginsel kan worden gemeten.

Als T dus een niet distributieve tralie is, dan moet T om kennistheoretische redenen (een ontologische basis moet nog worden gezocht) zwak modulair zijn (Pirons stelling).

De intuïtieve schets van de niet-distributiviteit van een totale theorie van de werkelijkheid wordt verscherpt door de vergelijking van herleidbare met onherleidbare netwerken (tralies)¹⁴.

Twee theorieën T_1 en T_2 kunnen in een T_3 worden samengebracht waarvan de elementen paren zijn (x_1x_2) in T_3 , met x_1 en x_2 in T_2 . De partiële orde in T_3 zou volledig van die in T_1 en T_2 afhangen:

$(x_1x_2) \subseteq (y_1y_2)$ alleen als $x_1 \subseteq x_2, y_1 \subseteq y_2$.

$(x_1x_2)' = (x_1'x_2')$ en $(s_1x_2) \cap (x_1 \cap y_1, x_2 \cap y_2)$.

T_3 is de directe unie van T_1 en T_2 .

Een netwerk dat als de directe unie van twee of meer netwerken kan worden geschreven is herleidbaar. Zoniet is het onherleidbaar. Alle distributieve netwerken met complement zijn herleidbaar.

Indien de totaalwerkelijkheid zou kunnen worden beschreven door een herleidbaar netwerk dan zou die totaalwerkelijkheid een zwakke eenheid hebben. De onafhankelijkheidsrelaties in de totaliteit zouden volledig bepaald zijn door afhankelijkheidsrelaties in deelaspecten of deelsystemen. Als de totale werkelijkheid een zichzelf verklarend systeem is, is dat niet mogelijk. Voor ons moet een globale theorie een niet onherleidbaar systeem zijn.

Langs de andere kant moet dezelfde totaalwerkelijkheid ook door deeltheorieën kunnen worden beschreven die wel herleidbaar zijn.

Niet herleidbare T 's kunnen als delen herleidbare T 's bevatten. "The lattices that occur in nature are in general reducible".¹⁵ Toch kunnen alle oordeelsystemen op een unieke manier in de unie van onherleidbare netwerken worden ontbonden. De totaliteit en haar laatste elementen hebben de onherleidbaarheid gemeen.

Men ziet duidelijk de analogie (zij het op een veel abstracter en algemener vlak) tussen herleidbare netwerken en lineaire ruimten.

¹⁴ Jauch, p.141.

¹⁵ p.142.

De onherleidbare tralies zijn veralgemeningen van de kwantumlogica. Als de werkelijkheid een sterke eenheid heeft (wat het geval moet zijn als ze zichzelf verklaart) dan is iedere totaaltheorie analoog aan de kwantumtheorie omdat ze anders onvoldoende unificatie zou hebben. Tegelijk wordt daaruit ook duidelijk dat deze totaaltheorie zeer vele minder geïntegreerde deeltheorieën moet hebben (anders zouden geen relatief autonome deelsystemen mogelijk zijn). Als deze wijsgerige veralgemening van Jauch correct is dan volgt een zeer aantrekkelijk resultaat. Hoe welkom deze ongewilde bonus ook is toch is het ons daar niet om te doen: we zoeken een justificatie voor het gebruik van complexe getallen. De brug tussen de twee overwegingen wordt gelegd door *de overeenkomst die bestaat tussen onherleidbare oordeelsystemen en subruimten van een Hilbert-ruimte*.

Vóór men daartoe komt ontmoet men nog een tweede bonus: niet alleen - zoals in de eerste paragraaf van deze uiteenzetting blijkt - moet de totaalwerkelijkheid groepen realiseren. Er is meer: een theorie van de totaalwerkelijkheid zal ook invariant zijn onder de transformaties van bepaalde groepen.

De groepen in kwestie zijn de automorfismegroepen van een oordeelsysteem. De automorfismegroepen van een theorie zijn permutaties van de objecten van de theorie die de netwerkstructuur ervan invariant laten. Zulke automorfismen heten ook symmetrieën. In vergelijking met de groepen die in par.1 werden vermeld blijkt dat die groepen de transformaties van kwaliteiten of eigenschappen van objecten of toestanden in de wereld waren, die andere objecten of eigenschappen invariant lieten. De groepen hier behandeld, zijn groepen die afhankelijkheidsrelaties (uitgedrukt in theorieën) invariant laten. Het zijn *speciale* gevallen van de eerste.

Om de automorfismen te bepalen moeten eerst morfismen worden ingevoerd.

Als T_1 en T_2 oordeelsystemen zijn en m een één-eenduidige afbeelding van het domein T_1 op het codomein T_2 , dan, als 1. $x \subseteq y \leftrightarrow m(x) \subseteq m(y)$ en 2. $m(x') = m(x)'$ geldt, is m een morfisme. Een morfisme heeft een inverse. Een automorfisme is een morfisme van een T_i op T_i . De verzameling van alle automorfismen van een T vormt een groep M . $m_1 m_2(x) = m_1(m_2(x))$ en $e(x) = x$. De inversen zijn bepaald.

Een toestand p wordt bepaald door een functie van T op het interval $(0,1)$ waarvoor geldt dat $p(\emptyset) = 0$, $p(I) = 1$, $p(\bigcup_i a_i) = \sum_i p(a_i)$, $p(a) = 1 = p(b) \rightarrow p(a \cap b) = 1$.

De ε -omgeving van de eenheid e van de automorfismengroep is de verzameling van de automorfismen m die $|p^m(x) - p(x)| < \varepsilon$ voor alle x in T en alle p , realiseren. Daardoor wordt een topologie in M bepaald.

Op basis daarvan kunnen topologische begrippen op M worden toegepast (sluiting grens punt, geconnecteerd zijn, discontinuïteit, compactheid)¹⁶. M is geconnecteerd als M geen A bevat, tegelijk open en gesloten. D.w.z.: als M niet de unie is van twee open en gesloten deelverzamelingen. De groep der automorfismen is in het algemeen te groot om 'fysische symmetrieën' te vatten. Andere topologische groepen σ zullen moeten worden gebruikt om dat te doen. Een topologische groep σ zal een symmetriegroep van een systeem zijn door T beschreven als een homomorfisme $\cup$ van σ in M bestaat.

Wijsgerig is het van groot belang dat men de overgang van M naar σ tenminste gedeeltelijk zou kunnen rechtvaardigen. Op dit niveau van abstractie kan dat nog niet. Juist zoals de onherleidbaarheid van het netwerk de integratiegraad van de theorie hoog stelt (en dus noodzakelijk is voor een algemene metafysica), juist zo stelt de geconnecteerdheid van M eveneens de integratiegraad van de symmetrieën van het

¹⁶ p.144.

systeem hoog. Zo volgt die tweede eis om dezelfde reden.

Jauch¹⁷ heeft een stelling die zegt dat als een netwerk T een geconnecteerde symmetriegroep σ toelaat, dan de afbeelding van $x\epsilon\sigma$ in de automorfismegroep M laat iedere component invariant (*als* T een directe unie van netwerken T_i is). Dit verbindt integratiegraad en ontbindbaarheid en is als zodanig ook weer metafysisch belangrijk.

Nu we de twee ‘bonussen’ hebben geoogst die Jauchs analyse van de relatie tussen oordeelsystemen en complexe getallen levert, schetsen we slechts hoe de complexe getallen worden bereikt.

De band met de complexe getallen wordt als volgt gelegd:

1. ieder onherleidbaar netwerk kan één-eenduidig worden afgebeeld op de gesloten lineaire subruimten van een Hilbert-ruimte over een veld;¹⁸
2. dit veld moet oneindig zijn;¹⁹
3. als men continue grootheden kan voorstellen moet dit veld dat der reële getallen als subveld bevatten;²⁰
4. een veld dat aan voorwaarden 2 en 3 voldoet is ofwel dat der quaternionen, ofwel dat der reële, ofwel dat der complexe getallen. De reële en quaternionen vallen weg.²¹

We hoeven dit niet in detail uiteen te zetten voor 2, 3 en 4 omdat men hier veel meer over de werkelijkheid veronderstelt dan tot nu toe gebeurde.

Wel is het van belang op te merken dat:

1. iedere metafysica een onherleidbaar netwerk moet zijn;
2. alle wetenschappen (o.a. menswetenschappen) die sterk geünificeerde domeinen bestuderen onherleidbare netwerken moeten zijn;
3. maar zulke wetenschappen niet allen continue grootheden moeten voorstellen, en bovendien sommige wetenschappen zwakkere maatsystemen dan getallen gebruiken.

Voor zuivere ordeningen, of intervalmetingen zijn geen analoge stellingen bekend.

We moesten rechtvaardigen - op een zeer hoog niveau van algemeenheid - waarom complexe getallen moeten worden gebruikt om de normen van de vectoren in de lineaire ruimten te meten. We zien dat we slechts de onvolledige schets van het verband kunnen geven.

Die schets toont echter reeds duidelijk de wijsgerige wortels van het invoeren van deze complexe getallen. Ze heeft eigenlijk zeker een even groot principieel belang als het bewijs van de noodzaak zowel groepen (die we hier weer ontmoeten), als lineaire ruimten te gebruiken in de beschrijving van de werkelijkheid.

I.7. Scalair product, bewerkingen op operatoren, unitaire en hermiteaanse operatoren en geïnduceerde transformaties in hun relatie tot de totaalwerkelijkheid

¹⁷ Jauch, p.146.

¹⁸ Piron 1964.

¹⁹ Eckman en Zabey 1969.

²⁰ Piron en Gudder 1971.

²¹ Emch 1963 en Jauch 1968.

1. Het begrip 'scalair product' schijnt zeer speciaal en technisch. De bedoeling van zijn invoering is nochtans vrij algemeen: men wil een middel vinden om het orthogonaliteitsbegrip in drie dimensies (dat wijsgerig samenhangt met ontologisch-causale onafhankelijkheid) te veralgemenen. Vele scalaire producten *zouden* mogelijk zijn. Het gepresenteerde is slechts een voorbeeld:²²
 - a. Met iedere twee vectoren $\underline{r}_1$ en $\underline{r}_2$ wordt een complex getal geassocieerd $(\underline{r}_1 \underline{r}_2)$.
 - b. $(\underline{r}_1 \underline{r}_2) = (\underline{r}_2 \underline{r}_1)^*$ (* is de complexe geconjugeerde $x-iy$ tegenover $x+iy$).
 - c. $(\underline{r}_1, c\underline{r}_2) = c(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$
 - d. $(\underline{r}_1 + \underline{r}_2, \underline{r}_3) = (\underline{r}_1, \underline{r}_3) + (\underline{r}_2, \underline{r}_3)$.
 - e. $(\underline{r}, \underline{r}) \geq 0$ $(\underline{r}, \underline{r}) = 0$, *alleen voor* $\underline{r} = 0$.

$(\underline{r}, \underline{r})^{1/2} (= \sqrt{(\underline{r}, \underline{r})})$ is de norm, de lengte of het bedrag van de vector. Een vector met norm gelijk aan 1 is gegeneraliseerd.

De cruciale bepaling die men beoogt is dat twee vectoren $\underline{r}_1$ en $\underline{r}_2$ orthogonaal zijn, als $(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = 0$.

De 5 voorwaarden die aan het scalair product worden gesteld zijn metafysisch interpreteerbaar:

- a. 3 en 4 drukken de lineariteit van het product uit (die past bij de lineaire vectorruimte).
- b. 1 en 2 drukken het feit uit dat complexe getallen de vectoren vertegenwoordigen maar dat de imaginaire component voor het product wordt geëlimineerd. Men zou dit een minimale complexe ruimte kunnen noemen. Een scalair product is een product van vectoren (= reeksen getallen) dat zelf een getal is (vandaar de naam). Men kan het natuurlijk ook in een reële ruimte bepalen:²³
 $(\underline{a}, \underline{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ $(\underline{a}, \underline{b}) = ab \cos \theta$.

De norm van een reële vector isoleert zijn lengte van zijn teken door hem met zichzelf te vermenigvuldigen. Dat de intensiteit van de interactie van twee vectoren (gemeten door hun scalair product) met dezelfde bewerking gemeten kan worden als de intensiteit van hun actie (gemeten door hun scalair product met zichzelf) is een noodzakelijke eigenschap van de werkelijkheid.

Dat in een Minkowski-ruimte het scalair product aan de componenten andere voortekens geeft (de tijdscomponent een *omgekeerde* signatuur ten opzichte van de ruimtecomponenten) toont dat het scalair product een klasse van bewerkingen vertegenwoordigt die eigenlijk alleen begrepen zijn als men de bepaling en de bestaansgrond van de klasse als klasse vat. Het scalair product

1. beeldt paren van vectoren op getallen af;
2. zo dat iedere component van een vector met de ermee overeenstemmende component van een andere vector wordt verbonden (voor een gekozen ordening van vectoren);
3. aan alle componentenparen gelijk gewicht gevend (maar niet noodzakelijk - alhoewel soms - dezelfde rol).

Uit deze drie eisen volgen de vijf bepalende eigenschappen. Als vectoren ofwel krachten van oorzaken, ofwel relaties tussen systemen uitdrukken kan men afleiden dat die

²² Elliott-Dawber, p.26.

²³ Feynman, deel I, 17.8 en 11.8.

krachten en die relaties (en de relaties tussen hen) moeten worden geordend en wel op analoge manier. Dit wordt gedaan door het scalair product.

Als Kant in zijn *Kritik der Reinen Vernunft* afleidt dat alle fenomenen een intensiteit moeten bezitten drukt hij voor fenomenen uit wat we hier voor krachten en relaties tussen systemen uitspreken.

2. We hebben met het scalair product paren van vectoren op getallen afgebeeld; we kunnen ook vectoren op vectoren afbeelden. Het begrip 'lineaire operator' werd al besproken. Metafysisch betekent dit dat de toestanden van systemen met elkaar kunnen worden vergeleken, en de werking van oorzaken ook. Vectoren drukken beide uit.

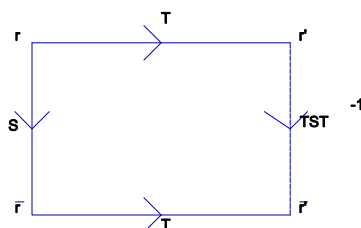
Transformaties van vectoren in vectoren drukken de elementen uit van de automorfismengroep van de lineaire vector-ruimte.

Metafysisch hebben ze belang omdat met hun hulp de veranderingen kunnen worden uitgedrukt die de onafhankelijkheidsrelaties en de ontbindbaarheidsrelaties van de werkelijkheid bewaren. Omdat het over een groep gaat kan men een eenheidstransformatie bepalen, een inverse transformatie T^{-1} ... en een product van twee transformaties.

Het is ontologisch zeer belangrijk dat onze werkelijkheid triviale lineaire transformaties van vectoren in de lineaire ruimte die haar uitdrukt, toelaat.

De groep der operatoren vertoont echter nog een sterkere eenheid: sommige operatoren kunnen in elkaar worden getransformeerd.

Laat $r, r', \bar{r}$ en $\bar{r}'$ vectoren zijn. Laat Sr in $\bar{r}$ en r' in $\bar{r}'$ transformeren, en Tr in r' en $\bar{r}$ in $\bar{r}'$. Het gaat hier duidelijk over twee van elkaar onafhankelijke transformaties. De operatie die r' in $\bar{r}'$ omzet is dan TST^{-1} . Immers



Men gaat van r' naar r met T^{-1} , van r naar $\bar{r}$ met S , van r tot $\bar{r}'$ met T . En zo is men van r' tot $\bar{r}'$ gekomen.

We spreken echter de stelling niet uit dat voor iedere transformatie x er een complexe transformatie bestaat die toelaat x uit een combinatie van twee onafhankelijke transformaties op te bouwen. Zo groot is de eenheid van de lineaire operatoren niet.

Elliott en Dawber noemen in hun 'Symmetry in physics'²⁴ het transformatiebegrip het meest belangrijke aspect van hun boek. Later zal nog beter blijken waarom (zij staan toe par. I en II, de invariantie door variantie, en de ontbindbaarheid met elkaar te verbinden en vormen zo de basis van het symmetriebegrip). Het transformatiebegrip staat toe de werkelijkheid, in haar ontbindbaarheid, toch als eenheid te zien.

3. Twee operatoren hebben belangrijke eigenschappen:
 - a. Men herinnert zich dat een basis voor een ruimte orthonormaal is als de basisvectoren alle waarde 1 hebben en orthogonaal staan tegenover elkaar.
 - b. Operatoren die orthonormale basissen in elkaar omzetten heten unitair. Een operator T is unitair als zijn inverse gelijk is aan zijn adjunct.

²⁴ Elliott-Dawber, p.30.

$$T^1 = T^+$$

T^+ heeft de eigenschap dat $(\underline{r}, T^+ \underline{s}) = \text{Tr}(S)$ (voor *alle* $\underline{r}, \underline{s}$). Het scalaire product van $\underline{r}$ met de adjunct van T toegepast op S , is gelijk aan het scalaire product van T toegepast op r met S .

De matrixverhouding maakt de betekenis van unitair duidelijker: $(T^+)_{ij} = (T_{ji})^*$ (de complex geconjugeerde van de getransformeerde matrix van T - waarin verticale rijen horizontale rijen geworden zijn én omgekeerd - is gelijk aan de matrix van de adjunct van T).

- c. Voor sommige operatoren geldt dat $H^+ = H$. Ze zijn hun eigen adjunct. In dat geval $(H\underline{r}, \underline{s}) = (\underline{r}, H\underline{s})$ (immers, door bepaling van $-T$ geldt $(H\underline{r}, \underline{s}) = (\underline{r}, H^+ S)$. Na, voor deze operatoren is $H^+ = H$). Dus volgt onmiddellijk de eigenschap.

Vanaf de kwantummechanica (waarvan wij gezien hebben dat ze, op basis van de eenheid van de werkelijkheid een metafysisch belang krijgt) heeft men zich geconcentreerd op unitaire en hermiteaanse operatoren.

Wigner²⁵ belicht, in matrixtermen, de betekenis van deze transformaties.

1. De *getransformeerde* van een matrix H heeft als elementen $a'_{ik} = a_{ki}$ (als a_{ki} de elementen van H zijn).
2. De *geconjugeerde* matrix heeft als elementen de complex geconjugeerden van de elementen van de oorspronkelijke.
3. $a^{*'} = a'^* = a^+$ (de *geadjungeerde*).
 Als $a = a^*$ (dus $a_{ik} = a^*_{ik}$) is de matrix reëel.
 Als $a = -a^*$ (dus $a_{ik} = -a^*_{ik}$) zuiver imaginair.
 Als $M = M'$ (dus $a_{ik} = a_{ki}$) symmetrisch.
 Als $M = -M'$ (dus $a_{ik} = -a_{ki}$) dan scheef (show) symmetrie.
 Als $M = M^+$ (dus $a_{ik} = a^*_{ki}$) dan hermetisch.
 Als $M = -M^P$ dan scheef hermetisch.
 Als $M' = M^1$ dan complex orthogonaal.
 Als $M^+ = M^1$ dan unitair.

Alle unitaire en hermetische matrices kunnen door een gelijkaardigheidstransformatie op diagonaalvorm gebracht worden.

De eigenwaarden van een hermetische operator zijn allen reëel²⁶. $H\Psi = E\Psi$ (zie ook Primas, booleaanse algebra's komen overeen met het spectrum - de reeks eigenwaarden - van Hoper). Men kan de INRC viergroep analoog met de $I^* T$ viergroep brengen (alleszins met verschillende eigenschappen). De analogie berust op het feit dat de $*$ inderdaad een verandering van $+$ naar $-$ (of omgekeerd) is, zoals de N in INRC, op het feit dat de R' een zuivere orde wijziging is (zoals R) en uit het feit dat de T een combinatie van $*$ en $'$ is. Men weet dat Piaget aan de INRC groep een intellectuele betekenis heeft gegeven. Analoog daaraan kan men ook aan deze groep een intellectuele betekenis geven. Of het letterlijk een groep is, staat open. Wel geldt " $=I, **=I, ++=I$.

$$a^{+*} = a'^{**} = a'$$

$$a^{+'} = a^{*ii} = a^*$$

$$a^{*'} = a'^{**} = a^+$$

Dus geldt ook dat twee operatoren samen de derde geven. Is commutativiteit geldig? Is de groep abeliaans?

²⁵ Wigner, pp.25-26.

²⁶ Wigner, p.40.

Ons onderzoek is hier niet op het subject maar op het zijn gericht.

Toch wordt de betekenis van unitariteit en hermeticiteit op deze manier klaar.

Unitariteit doet de inverse samenvallen met een combinatie van permutatie en complexe-inversie (partiële inverse). Hermeticiteit doet met dezelfde combinatie de identiteit samenvallen.

Als men de vraag naar de betekenis van herordening en partiële inversie voor willekeurige systemen, oorzaken of zijnden kan stellen, kan men de betekenis van de twee eigenschappen op het spoor komen.

Daarom is het nodig na te gaan of deze soorten operatoren ook een algemeen wijsgerige betekenis hebben. We zullen ons tot vrij oppervlakkige opmerkingen moeten beperken. Jauch²⁷ leidt expliciet het belang van hermetiaanse operatoren voor de representatie van observabelen af uit de stelling dat ieder τ -homomorfisme van Borel-verzamelingen op de Hilbert-ruimte overeenkomt met één en één enkel zelf-geadjungeerd operator. Dit is een zeer speciaal resultaat, volgend uit speciale eigenschappen van één speciale ruimte.

De omweg is te groot. Wel blijkt het probleem (analoog aan dat van de complexe getallen) een diepe betekenis te hebben.

Primas²⁸ gaat ook grondig in op de betekenis van de zelf-adjuncte operatoren.

Dat men de objecten van een domein - of het statische voorwerpen of dynamische processen zijn - kon individualiseren op basis van een aantal wederzijds van elkaar onafhankelijke basiseenheden waarborgt de interne multipliciteit van de werkelijkheid. De orthogonaliteit is wezenlijk. Dat die basisvectoren gelijke normen hebben is ook essentieel. Ze moeten even belangrijk zijn om een pluraliteit van grondperspectieven te leveren. Die norm kan conventioneel aan 1 worden gelijkgezet. De transformaties die zich in dat domein voordoen moeten die eigenschap invariant houden: een werkelijkheid waarvan de fundamentele aspecten niet worden gewijzigd door haar evolutie voldoet aan invarianteisen die op een andere manier door de groepeeigenschappen van de realiteit worden voldaan. Vandaar het belang van unitaire operatoren. Zowel hermetiaanse als unitaire operatoren beperken de complexiteit van de operatoren: $H=H^+$, en $T^I=T^+$.

De adjunct (die de complex geconjugeerde van een permutatie is, in determinantentermen) wordt respectievelijk herleid tot de operator zelf (hermetiaans) of tot zijn inverse (unitair). In de twee gevallen is een combinatie van complexe conjugatie met transpositie (in determinantentermen) ofwel gelijk aan identiteit, ofwel gelijk aan inverse. Dit komt overeen met de minimale complexiteit waarvan in vorige paragrafen sprake was.

Het is niet duidelijk of het feit dat unitaire operatoren orthonormale basissen of orthonormale basissen afbeelden *zelf* een eigenschap van de werkelijkheid is, of alleen een wiskundige noodzakelijkheid. In ieder geval, *dat* werkelijke operatoren unitair en hermetiaans zijn is, om de redenen die wij zojuist aangaven, significant.

I.8. Representaties van groepen

8.1. Representaties als integratie van groepen en ruimten

In II en III werden argumenten aangegeven ertoe strekkend dat de werkelijkheid groepen moest realiseren, in V werd ervoor gepleit dat de werkelijkheid zou worden weergegeven door lineaire ruimten in lineaire transformaties. Het ligt voor de hand dat die twee gedachten bij elkaar moeten worden gebracht. In K4 van Elliot-Dawbers 'Group representations', in KIII, par. 4 van Weyls

²⁷ Jauch, 'The math. struct. of elem. quant. theory', p.313.

²⁸ Primas, pp.62-65.

'Darstellung von Gruppen durch lineare Transformationen' en in KIX van Wigners 'Allgemeine Darstellungstheorie' wordt dit onderwerp behandeld. Wij schrijven echter niet af: wij hebben getoond dat uit de natuur van zijn, causaliteit, systeem en totaliteit *volgt* dat de mathematische resultaten, die in de vorige paragrafen werden behandeld, toepasbaar zijn in de natuur. Nu willen wij opnieuw tonen dat een belangrijke metafysische eis de elementen van een groep met de lineaire operatoren in een lineaire ruimte verbindt. De relatief autonome deelsystemen en de oorzaken van de werkelijkheid zijn door een aantal onafhankelijke basiseigenschappen gekarakteriseerd. De veranderingen die zij ondergaan moeten zó zijn dat die basiseigenschappen behouden blijven en dat zij als veranderingen van de relaties van systemen en oorzaken tot die basiseigenschappen kunnen worden gekarakteriseerd. Later zal die eis als volgt kunnen worden gepreciseerd. In een metafysische theorie die op het geheel van de werkelijkheid betrokken is, moet die werkelijkheid worden voorgesteld door een vectorruimte die tegelijk *invariant* en *onherleidbaar* is met betrekking tot de transformaties geïnduceerd door een groep G .

Dit is slechts de aankondiging van een programma. Wij moeten nog de begrippen van 'geïnduceerde transformatie', invariantie en onherleidbaarheid invoeren en die wiskundige begrippen metafysisch interpreteren.

Een groep G (met elementen G_a, G_b enz.) wordt gerepresenteerd voorgesteld of geconcretiseerd door een verzameling lineaire operatoren $T(G_a)$ (met iedere G_a komt een $T(G_a)$ overeen) als $T(G_a G_b) = T(G_a)T(G_b)$ en $T(E) = 1$.

De representatie van het product van twee groeps-elementen is het product van de twee representaties die met de groeps-elementen overeenkomen en de representatie van de eenheid van de groep is de identieke transformatie (die alle punten van de lineaire ruimte op zichzelf afbeeldt). Het woord product wordt hier dus wel in twee verschillende betekenissen gebruikt: de eerste keer gaat het over het product van twee groeps-elementen, de tweede keer over het product van twee lineaire transformaties. Metaforisch kan men wat hier gebeurt ook als volgt uitdrukken. De 'natura naturans' is structureel gelijk aan de 'natura naturata' (lineaire transformaties). Dit tenminste als de representatie 'trouw' is (d.w.z. als er een eenduidige relatie tussen de G_a en de $T(G_a)$ bestaat wat niet noodzakelijk waar is voor iedere representatie). De groep drukt dus de veranderingen uit die de werkelijkheid ondergaat, en de transformaties drukken de relaties tussen initiële en finale toestanden (ontleed in elementaire aspecten en elementen) uit. De representatiestelling zou eisen dat, in het geval van maximale trouw, iedere verandering in zulk koppel (centraal, finaal) kan worden uitgedrukt, en ieder koppel overeenkomt met een groeps-element.

De invariantie-eisen uitgedrukt door de groep, en de onafhankelijkheidseisen uitgedrukt door de lineaire operatoren, komen samen en moeten met elkaar overeenkomen.

Wigner (p.79) zegt hetzelfde op een andere manier: "Die Darstellung einer Gruppe (durch linear Substitutionen) ist eine zu ihr isomorphe substitutionsgruppe (matrizengruppe) also eigentlich eine ? je einer matrix $\underline{D}(A)$ zu jedem gruppenelement A , so das $\underline{D}(A)\underline{D}(B) = \underline{D}(AB)$."

Vermits met iedere lineaire transformatie een matrix overeenkomt (en omgekeerd) zeggen de twee bepalingen hetzelfde.

8.2. Invariante deelruimten onder G

Voor een lineaire ruimte L en een transformatie T kan het voorkomen dat alle vectoren $\underline{r}$ in L die in een deelruimte L_1 liggen, getransformeerd hebben ($\underline{Tr}$), die ook in L_1 gesitueerd zijn. In dat geval is L_1 invariant onder T : T doet de grenzen van L_1 niet overschrijden. Het kan ook voorkomen dat alle transformaties ($T-G_a$) die de elementen van een groep G representeren, een deelruimte L_1 invariant houden. L_1 is dan een invariante deelruimte onder G . Als de vectoren

toestanden uitdrukken en de $T(G_a)$ veranderingen daarvan, dan vertoont een lineaire ruimte met invariante subruimten een *interne multipliciteit*; de veranderingen in L vallen in klassen uiteen die door representaties van G niet in elkaar kunnen overgaan.

Het gevaar van de grote algemeenheid van metafysische deducties wordt duidelijk als men over het statuut van invariante subruimten nadenkt. Vanuit de eis tot eenheid van het heelal moet men L en G zoeken *zonder* invariante subruimten. Vanuit de eis tot het bestaan van subsystemen zou men wel over invariante subruimten moeten beschikken. Dit conflict kan wel overwonnen worden door verschillende groepen G_i te beschouwen waarvan sommige aan de eerste, andere aan de tweede voorwaarde voldoen. In welke onderlinge relaties moeten die groepen dan echter staan? Op die vraag hebben wij nog geen antwoord. Wij komen er later op terug.

8.3. Herleidbare en onherleidbare representaties

De overeenkomst tussen groepen en transformaties van lineaire ruimten is niet zeer streng. Men kan voor eindige groepen oneindige reeksen van steeds complexere representaties in meer en meer hoogdimensionale ruimten vinden. De representatie van groepen schijnt onoverzichtelijk te worden. Dit zou de draagwijdte van iedere metafysica zeer sterk beperken indien het zou gelden zonder restricties: we zouden zelfs uit het feit dat de werkelijkheid niet alleen groepen moet realiseren, maar ook nog *speciale* (b.v. eindige, in het algemeen) groepen, weinig of niets over die werkelijkheid kunnen afleiden omdat iedere groep een onbeperkt aantal verschillende representaties zou hebben. Daarom ontstaat niet alleen wiskundig (vanuit de behoefte te vereenvoudigen), maar ook metafysisch (vanuit de behoefte te begrijpen) de behoefte te zoeken naar beperkingen van de verzameling der representaties. Dit zoeken lukt. *Alle representaties van een eindige groep kunnen worden opgebouwd uit een eindig aantal 'onherleidbare' representaties.* Dit is, zowel wiskundig als metafysisch, een fundamentele stelling. Om de draagwijdte ervan in te zien is het nodig goed het begrip *onherleidbaarheid* voor ogen te hebben. Om dat uit te leggen is een korte voorbereiding nodig, die we nu aanpakken.

Als een vectorruimte L een orthonormale basis $\underline{e}_i$ ($i=1,2,\dots,n$) heeft, kan men een subruimte L_1 vormen door een subverzameling van de $\underline{e}_i$ te kiezen ($i=1,2,\dots,m$, $m < n$). De overblijvende basisvectoren die niet in L_1 liggen vormen een subruimte L_2 waarvan de basisvectoren orthogonaal op die van L_1 staan. L_2 is het orthogonaal complement van L_1 .

Als L een ruimte is die invariant is onder de transformaties $T(G_a)$ geïnduceerd door de elementen van een groep G , als L_1 (subruimte van L) ook invariant is onder G , én het orthogonaal complement L_2 van L_1 is ook invariant, dan is de representatie T 'herleidbaar'.

Men bewijst dat bij unitaire transformaties uit de invariantie van L_1 , die van L_2 volgt. Metafysisch betekent dit dat de operatoren die de onafhankelijkheidsrelaties invariant houden omdat ze orthonormale basissen in orthonormale basissen omzetten, de eigenschap hebben, als ze een domein invariant houden, het orthogonaal complement van dat domein ook invariant te houden.

Men bewijst ook dat bijna alle ontologische (en dus fysisch) belangrijke transformaties unitaire zijn.

Uit deze stelling volgt dat men iedere ruimte in een som van subruimten kan ontbinden, die allen individueel genomen invariant zijn onder $T(G_a)$ en onherleidbaar. Het aantal onherleidbare subruimten kan groter zijn dan twee, omdat ieder complement nog geen orthogonaal complement is, en men dus verplicht kan zijn het complement van een onherleidbare deelruimte nog verder te herleiden (bovendien volgt uit de invariantie van L_i niet de onherleidbaarheid ervan).

$L = L_1 + L_2 + L_3$ (alle L_i onherleidbaar en invariant) en, ten gevolge daarvan:

$T(G_a) = T^1(G_a) + T^2(G_a) + T^3(G_a) + T^q(G_a)$ is de onherleidbare representatie van G_a geïnduceerd in de ruimte L_q .

De ruimte waarin de werkelijkheid wordt afgebeeld kan zonder rest worden onderverdeeld in deelruimten die delen van de werkelijkheid afbeelden die niet in elkaar overgaan door reële transformaties, maar die zelf voldoende zijn geïntegreerd om niet meer te kunnen worden ontbonden in zelf invariante deel-deelruimten. De onherleidbare invariante deelruimten zijn natuurlijk geen atomen, maar hebben, ten opzichte van de groepsrepresentatoren, atomaire eigenschappen. Ze zijn niet verder deelbaar en worden door reële transformaties niet meer veranderd. Men zou ze structurele atomen kunnen noemen. Indien de transformaties die in de werkelijkheid voorkomen niet aan deze voorwaarde zouden voldoen, dan zou de graad van integratie van die werkelijkheid zo groot zijn dat men over de opsplitsbaarheid niet zou kunnen spreken.

Uit wat voorafgaat volgt dat het representatieprobleem vereenvoudigd is geworden. Het groot aantal representaties is in die zin 'herleid', dat men de eigenschappen van iedere representatie kan verklaren vanuit de eigenschappen van de onherleidbare componenten waaruit ze zijn opgebouwd. Toch blijven er nog een oneindig aantal onherleidbare representaties over, omdat in de bepaling van orthogonale componenten, het begrip 'basis' voorkomt en men voor iedere lineaire ruimte in het algemeen over vele gelijkwaardige basissen kan beschikken.

8.4. Gelijkwaardige representaties

Om de multipliciteit van representaties nog verder te verminderen voert men de gelijkwaardigheid van representaties in. Als $T(G_a)$ een representatie van G in een ruimte L is, dan is $T(G_a)$, agerend op een ruimte L' waarop L afgebeeld is, door een afbeelding A , ook een representatie van G in L' .

$$T'(G_a) = AT(G_a)A^{-1}$$

Men kan hier vergelijken met de bepaling van klassen voor groeps-elementen: ze is structuurgelijk aan die van gelijkwaardigheid voor representaties.

Het bewijs is eenvoudig ²⁹

$$T'(G_a)T'(G_b) = AT(G_a)A^{-1}AT(G_b)A^{-1}$$

Vermits $A^{-1}A = 1$, is de rechterzijde gelijk aan:

$$AT(G_a)T(G_b)A^{-1}.$$

Bij bepaling van-, volgt dat de laatste uitdrukking gelijk is aan $T'(G_aG_b)$. Dus geldt de eigenschap van representatie:

$$T'(G_a)T'(G_b) = T'(G_aG_b).$$

Gelijkwaardige representaties vormen een gelijkwaardigheidsklasse (de equivalentierelatie is symmetrisch en transitief). De stelling van Moschke spreekt uit dat *iedere gelijkwaardigheidsklasse een unitaire representatie bevat*.

Metafysisch kan dit als volgt worden vertaald: iedere verandering in de werkelijkheid die de *invariantie*-eigenschappen ervan eerbiedigt is gelijkwaardig aan een verandering die de *onafhankelijkheid*-eigenschappen eerbiedigt. Dit is - in metafysische termen - een fundamentele eigenschap van de relatie tussen de causaliteit en systematiciteit, tussen wording en zijn, tijd en structuur.

De studie van de representaties van groepen (i.e. van de wijzigingen die de werkelijkheid ondergaat als ze wordt blootgesteld aan krachten die grote structuren invariant houden) is herleid tot de studie van niet gelijkwaardige onherleidbare representaties.

²⁹ Elliott-Dawber, p.52.

8.5. Orthogonaliteit der ongelijkwaardige en onherleidbare representaties

Deze niet gelijkwaardige onherleidbare representaties zijn orthogonaal ten opzichte van elkaar. De belangrijkste symmetrieën hangen van die orthogonaliteitseigenschappen af. De orthogonaliteitseigenschappen hangen van de lemma's van Schur af.

8.5.a. Eerste lemma van Schur

Iedere operator die commuteert met de operatoren $T(G_a)$ van een onherleidbare representatie is een constant veelvoud van de eenheidsoperator.

Laten we interpreteren wat dit betekent. Twee operatoren commuteren als de orde waarin ze worden toegepast niets wijzigt. Dat betekent dus dat ze niet met elkaar interfereren omdat ze niet op dezelfde eigenschappen (of met elkaar verbonden eigenschappen) inwerken. Een onherleidbare representatie is een verzameling operatoren die alle acties van een groep realiseren maar geen enkel subdomein van de ruimte waarop ze inwerken onveranderd laten. We hebben door de commutativiteit dus onafhankelijkheid en door de onherleidbaarheid integratie.

De stelling zegt dat als $T(G_a)A = AT(G_a)$ voor alle G_a in G , dan is $A = I_1$. Slechts zeer weinige en zeer speciale operatoren kunnen met alle transformaties commuteren: ze laten alles onveranderd of zijn een veelvoud van operatoren die alles onveranderd laten. Schurs eerste lemma zegt dus eigenlijk dat in regel operatoren niet met alle transformaties van een onherleidbare representatie commuteren. In regel is de orde wel belangrijk en zijn de transformaties dus niet onafhankelijk. De werkelijkheid is één.

8.5.b. Tweede lemma van Schur

Laat $T^{(1)}(G_a)$ en $T^{(2)}(G_a)$ twee onherleidbare representaties van G zijn in twee lineaire ruimten L_1 en L_2 met dimensie S_1 en S_2 . Laat A een operator zijn die vectoren van L_2 in vectoren van L_1 omzet. Als $T^{(1)}$ en $T^{(2)}$ niet gelijkwaardig zijn, en $T^{(1)}(G_a)A = AT^{(2)}(G_a)$ voor alle G_a in G , dan is A de zero operator.

Metafysisch geïnterpreteerd kunnen de twee L_1 en L_2 waarover sprake slechts twee verschillende modellen van de werkelijkheid zijn, of twee modellen van verschillende delen van de werkelijkheid. De operator A werkt hier op de totaliteit van de representaties en kan dus niet dezelfde betekenis hebben (vanuit een metafysisch gezichtspunt) als de A in het eerste lemma van Schur. Twee niet gelijkwaardige onherleidbare representaties van dezelfde invariante structuur (G) kunnen dus niet in elkaar worden omgezet (de operator die het zou doen is de zero operator). De zero operator beeldt alles af op de lege klasse.

Dit tweede lemma van Schur drukt uit dat de verschillende geïntegreerde realisaties van dezelfde invariantie tot onvergelykbare modellen behoren of tot werkelijkheidsdomeinen die gesloten zijn tegenover elkaar.

Door de twee lemma's van Schur bij elkaar te brengen komt men tot de orthogonaliteits-(=onafhankelijkheids-) relaties tussen ongelijkwaardige (a) onherleidbare (b) representaties (c). Algemeen uitgedrukt leidt ze als volgt.

Laat $T^{(a)}(G_a)$ en $T^{(b)}(G_a)$ twee onherleidbare representaties van een groep G zijn in twee ruimten L_a en L_b . Laat X een operator zijn die vectoren van L_b in vectoren van L_a afbeeldt. De operator $A = \sum_b T^{(a)}(G_{b1}) X T^{(b)}(G_b^{-1})$ heeft de eigenschappen van A in de twee lemma's van Schur.

$$T^{(a)}(G_a)A = AT^{(b)}(G_a).$$

Als $T^{(a)}$ en $T^{(b)}$ gelijkwaardige representaties zijn dan is $A = I_1$; als $T^{(a)}$ en $T^{(b)}$ ongelijkwaardig zijn

dan is $A=0$. Dus: $A=l\delta_{\alpha\beta}$ (met $\delta=0$ of $d=1$). Als een groep vele niet gelijkwaardige onherleidbare representaties heeft kunnen de systemen of processen die door deze representaties adequaat worden beschreven op elkaar geen invloed uitoefenen. Dit betekent dat complementaire realisaties van dezelfde invariante structuur elkaar niet beïnvloeden (als ze modellen van eenzelfde domein zijn; als verschillende domeinen die dezelfde structuur realiseren elkaar niet beïnvloeden, en als processen die met commuterende transformaties (waarvoor de orde onbelangrijk is) overeenstemmen, elkaar ook onverlet laten).

Is dit resultaat in tegenstrijd met de eenheid van de werkelijkheid, of is het integendeel een waarborg voor het aanwezig zijn in de werkelijkheid van vele gesloten systemen en processen (deel-integratie of aspect-integratie).

8.6. De eindigheidsstelling voor representaties van eindige groepen

De eigenwaarden van een operator T zijn de getallen E die aan de volgende vergelijking voldoen $Tr=Er$.

Als we een verandering van basis een similariteitsformatie noemen (metafysisch: de overgang van een verzameling orthogonale vectoren waarin alle vectoren aan de ruimte kunnen worden uitgedrukt naar een andere verzameling orthogonale vectoren met dezelfde eigenschap). Concreet: een verandering van referentiekader of coördinatenstelsel. Hoewel alle coördinatenstelsels basissen zijn maar niet omgekeerd, blijkt toch dat de eigenwaarden invariant zijn onder similariteitstransformaties. Daaruit volgt dat de som van alle eigenwaarden ook invariant is. In een matrixrepresentatie wordt die voorgesteld door de som van alle diagonaalelementen in een basis. Dit heet het spoor van de matrixrepresentaties van $T(G_a)$, aangeduid door $\chi(G_a)$ (*chi- G_a*). Als men a alle elementen van de groep G doet doorlopen is de verzameling van alle sporen van $(T-G_a)$ de karakteristiek van T .

De karakteristiek is invariant onder similariteitstransformaties.

Alle elementen van een groep die tot eenzelfde klasse behoren hebben dezelfde karakteristiek.

Nota: de karakteristieken van een groep zijn dus functies van de klassen der elementen van die groep. Weyl toont dat uit het feit dat een eindige groep slechts een eindig aantal klassen heeft, ook volgt dat "Eine endliche Gruppe höchlich so viele inäquivalente irreduzible Darstellungen zulässt, als die Zahl ihrer Klassen beträgt".³⁰

Metafysisch zijn de diagonaalelementen in een matrix de elementen die de relatie van systemen of processen met zichzelf uitdrukken. Hoe de elementen van groepen en de transformaties van representaties zichzelf affecteren wordt door de diagonaalelementen uitgedrukt. Met iedere operator komt een matrix overeen.

Een karakteristiek is opnieuw een vector. De orthogonaliteitsrelaties tussen onherleidbare representaties leveren ook relaties tussen de karakteristieken van de representaties.³¹

$$\sum_{p=1}^n c_p \chi_p^\alpha \chi_p^{\beta*} = g \delta_{\alpha\beta}$$

Karakteristieken van groepen G zijn vectoren in een vectorruimte met dimensie n (waar n het aantal der klassen van G is) c_p is het aantal elementen in een klasse K_p .

Dat het aantal van de niet gelijkwaardige onherleidbare representaties van een groep exact gelijk is aan het aantal van haar klassen, heeft een wijsgerige betekenis.

De klassen van een groep zijn de soorten van gelijkaardige veranderingen die de groep

³⁰ Weyl, p.61.

³¹ Elliott-Dawber, p.61.

beschrijft.³² De *verschillende ongelijkwaardige onherleidbare representaties* van de groep zijn de soorten systemen van veranderingen die de groep als geheel in ruimten induceert.

De totaliteit van de componenten van de groep toegepast op domeinen genereert evenveel onafhankelijke en verschillende globale transformaties als er, sociaal gesproken, natuurlijke soorten van groepscomponenten zijn. Door deze eigenschap *hangt de externe structuur van de realisaties volledig af van de interne structuur van de groep*. We zouden naast het wiskundig bewijs³³ ook een direct metafysisch bewijs van de relatie moeten hebben.

Als g het aantal der groepselementen is dan, als χ onherleidbaar is geldt

$\sum_p c_p(\chi_p) = g$ (noodzakelijke en voldoende voorwaarde). De stelling volgt uit de orthogonaliteitsrelatie.

Als χ_p de karakteristiek van T voor een element in K_p is, en m_a is het aantal malen dat een onherleidbare ongelijkwaardige representatie T^a in de reductie van T voorkomt, dan is

$$\chi_p = \sum_n m_n \chi_p^n.$$

Praktisch is de stelling die het aantal verschillende onherleidbare representaties van eindige groepen zelf eindig van aantal maakt zeer belangrijk (als instrument voor vereenvoudiging) en de uitdrukking van die stelling met de hulp van karakteristieken maakt ze verder bruikbaar. We hoeven de analyse van karakteristieken niet verder door te zetten.

Metafysisch echter is de stelling ook belangrijk omdat ze een finitistisch besluit toelaat. Dat besluit is zeker niet volledig: we hebben er wel voor gepleit dat de werkelijkheid groepen moet realiseren. Die groepen kunnen eindig of oneindig zijn. Metafysische redenen om eindige groepen te doen verkiezen werden niet aangebracht. Oneindige groepen werden in hun specificiteit niet ontleed. Het resultaat dat we zojuist zagen sluit echter in dat alle eindige groepen slechts een eindig aantal onherleidbare representaties hebben. Ook dit impliceert niet dat de lineaire ruimten waarin groepen gerealiseerd worden eindig en/of discontinu zouden moeten zijn. Het sluit echter wel in, zelfs al induceren de eindige groepen waaraan de werkelijkheid voldoet, oneindige aantallen transformaties, dat deze oneindige aantallen herleidbaar zullen zijn tot eindige hoeveelheden representaties. De eindigheid van de interne groepsstructuur wordt teruggevonden in de eindigheid der realisaties.

Dit is een bijzondere toepassing van de eigenschap die zojuist op p. ... werd vermeld.

8.7. Functies van groepen, ruimten en representaties en de werkelijkheid

Zowel voor groepen als voor representaties kan men producten (van groepen respectievelijk representaties), subgroepen en subrepresentaties, representaties op deelruimten (b.v. projecties) beschouwen.

Interessante eigenschappen daarvan zijn 1) representaties die onherleidbaar zijn voor een groep G zijn daarom niet onherleidbaar voor alle subgroepen; 2) het direct product van twee representaties is zelf een representatie (met de karakteristieken $\chi^{(\alpha\beta)}(G_a) = \chi^{\alpha(G_a)} \chi^{\beta}(G_a)$). Het direct product

$T^{\alpha\beta}_{ij,kl}(G_a) = T^{\alpha}_{ik}(G_a) T^{\beta}_{jl}(G_a) (A \times B)_{ij,kl} = A_{ik} B_{jl}$; 3) onherleidbare operatoren verzamelingen. $S^{(\alpha)}_i$ worden als volgt bepaald door het feit dat ze elkaars getransformeerden zijn:

$$S^{(\alpha)}_i = T(G_a) S^{(\alpha)}_i T(G_a)^{-1} = \sum_j T^{(\alpha)}_{ji}(G_a) S^{(\alpha)}_j$$

³² Elliott-Dawber, p.17.

³³ Elliott-Dawber, 4.13.

Ze transformeren volgens de onherleidbare representatie T^α .³⁴

De overeenstemming van de representaties van groepsproducten met de producten van representaties zijn veralgemeende vormen van lineariteit.

Dat onherleidbaarheid geen eigenschap is die behouden blijft bij het vormen van subgroepen is een holistische eigenschap.

Meer dan metafysische correlaten te zoeken voor deze eigenschappen van representaties is het belangrijk de algemene vraag te stellen.

Verondersteld dat de werkelijkheid groepen realiseert, en dit kan worden voorgesteld door lineaire ruimten, en die groepen realiseert door transformaties in die ruimte die de groepselementen representeren, en verondersteld dat - zoals wij toonden - metafysische redenen bestaan om dat waar te maken, welke eigenschappen van functies van groepen, ruimten en representaties (b.v. van product, som, deel, complement, enz.) zijn dan - eveneens om metafysische redenen - geldig?

De suggesties van deze laatste paragraaf gaan in die richting.

In het beantwoorden van die vraag moet meer bepaald het feit dat de werkelijkheid aan wetten gehoorzaamt, zich in causale ketens uitbreidt, uit systemen bestaat, in ogenschouw worden genomen.

Ook systemen hebben sub- en supersystemen en omgevingen, ook wetten staan tot elkaar in onafhankelijkheidsrelaties, ook causale tekens convergeren en divergeren.

Wetten veronderstellen universaliteit (en dus ruimten) naast irrealiseren (en dus groepen); systemen veronderstellen (I, O, T, f, g) en een cartesiaans product van ruimten zowel als een invariantie (of toch relatieve invariantie onder groepen die I, O en T veranderen maar f en g niet); causale processen zijn wel in één zin verschillend dat ze een irreversibele asymmetrie vertonen, maar toch weer verwant doordat - zoals we kort vermeldden - de gevolgen verschijnen om een deel van de gestoorde symmetrieën te herstellen.

We werken dit hier niet uit. Maar we willen de boodschap van dit inleidend deel onderstrepen: om metafysische redenen die volgen uit wetmatigheid, systematiciteit en causaliteit zal de werkelijkheid concrete realisaties van groepen, lineaire ruimten en representaties van groepen in zulke ruimten vertonen.

De algemene inleiding ligt achter ons. Nu moet worden getoond om welke metafysische redenen, welk soort groepen in welke soort representaties de werkelijkheid *moeten karakteriseren*.

I.9. Classificatie van groepen

9.1. Systeem, oorzaak en wet als basissen voor groepen

Tot nu toe werd nagegaan of er metafysische redenen bestonden waarom de werkelijkheid groepen zou realiseren. We zagen dat die inderdaad bestonden. De metafysica zou echter een zeer abstracte en - daardoor - niet progressieve wetenschap blijven. Het is gelukkig mogelijk ook metafysisch af te leiden dat meer speciale groepen op delen van de werkelijkheid moeten worden toegepast.

Als inleiding en voorbereiding trachten wij uit systeem, oorzaak, en wet de geldigheid van verschillende soorten groepen te doen volgen. Deze ontwikkeling blijft echter hypothetisch.

Na de meer deductieve poging tot afleiding, gaan we dan inductief de voornaamste groepen uit de natuurkunde voorstellen en ze ontologisch afleiden. Als de poging correct is moeten de

³⁴ p.80: de Wigner-Eckart stelling wordt elders besproken.

deductieve en de inductieve weg elkaar ontmoeten en versterken.

1. Een systeem is een klasse variabele factoren die in zulke relaties tot elkaar staan dat de veranderingen die ze ondergaan, door reactie-processen, de oorspronkelijke eigenschappen herstellen. Dit betekent dat systemen kunnen worden geklasseerd door $\langle V, R, W, P, E \rangle$: variabelen, relaties, wijzigingen, processen, eigenschappen. Systemen zijn dus door operaties (W) met R inversen bepaald.
 De wijzigingen kunnen wijzigingen zijn van V ten opzichte van zijn omgeving ($O(V)$). Ze kunnen ook wijzigingen zijn van delen van V ten opzichte van de omgeving ($O(V)$). Het kunnen wijzigingen zijn van delen van V ten opzichte van elkaar.
 Voor de twee laatste soorten wijzigingen kunnen ze op eenzelfde manier alle delen treffen, of op verschillende manier de verschillende delen.
 De wijzigingen kunnen eigenschappen of relaties veranderen. De relaties kunnen binaire, tertiaire of n -aire relaties zijn. Ze kunnen tussen de delen van V , tussen V en $O(V)$, tussen V en delen van $O(V)$, en tussen delen van V en delen van $O(V)$ bestaan. Dezelfde indeling kan worden toegepast op de gewijzigde eigenschappen als op de invariant (of *na* variatie, tot de initiële toestand terugkerende variabelen).
 De processen die de wijzigingen compenseren kunnen de directe inversen zijn van de processen die ze veroorzaakten of integendeel willekeurige eenvoudige of complexe processen die door hun interferentie de oorspronkelijke toestand herstellen.
 Deze classificatie van de wezenlijke ingrediënten van een systeem blijft extern en mechanisch voor zover ze niet van het systeembegrip zelf kan worden afgeleid.
 We stellen ze voor omdat we hopen dat de classificatie van de groepen met die van de systemen in verband kan worden gebracht.
 Andere voorstellingen van systemen zijn mogelijk: $\langle I, O, S, f, g \rangle$: inputverzameling, outputverzameling, toestandsverzameling, $f: I \times S \rightarrow O$ (input-output functie en $g: I \times S \rightarrow S$ (volgende toestandsfunctie).
 Men kan de vijf elementen vaag (fuzzy) maken en ze bovendien variabel, evolutief maken. Deze vage en evolutief-lerende systemen kunnen met elkaar in collectieve interactie worden gebracht. Onze hypothese zou zijn dat de transformatiegroepen die op I, O, S, f en g zouden worden toegepast door algemene eisen op evolutie, onbepaaldheid en interactie zó zouden worden gespecificeerd dat de groepen die blijkbaar in de empirische wetenschappen de symmetrieën van de wetten bepalen, ervan afleidbaar worden.
 Dit is toekomstmuziek.
 De twee manieren om systemen voor te stellen moeten met elkaar in verband worden gebracht (ze staan ver van elkaar af: de vijf componenten van de tweede voorstelling zijn invarianten, de I , O en S zijn beperkte variabelen, de f en g zijn constanten) als men vaagheid en evolutie invoert wordt dit beeld veel complexer.
2. Een oorzaak is een symmetriebreuk, geen symmetrie. Op het eerste gezicht lijkt het dus zinloos groepen met oorzaken in verband te brengen. Oorzaken bepalen irreversibele tijd, en de irreversibele tijd, in zoverre hij wordt gevat, wordt gevat door thermodynamica, evolutietheorie en geschiedenis. *Men zou zich dus moeten afvragen of en hoe groepen een rol spelen in deze drie wetenschappen.* Dit is - bij ons weten - nog niet gebeurd. Wij moeten erop terugkomen.
 Toch kan uit oorzakelijkheid een begin van groepsclassificatie worden afgeleid. Laat een oorzaak-gebeurtenis een relatie tussen twee of n (simpel: 2) objecten o_1 en o_2 zijn, invariant onder (respectievelijk) G en G' , en zó dat, als $R(G, G')$ ontstaat, één of beide symmetriebreuken ondergaan zodat in een tweede stadium de objecten nog slechts onder

subgroepen g en g' invariant zijn. Laat dit slechts voor één object gebeuren, of laat de transformatie het gevolg zijn van de act van één of meer elementen van G of G' alleen. Het causaal proces eindigt door het transformeren van o_1 en o_2 in o_1' en o_2' waarvoor geldt dat ze invariant zijn onder H en H' , waar ofwel $H=G$, $H'=G'$ (1) ofwel één van die twee vergelijkingen waar is (2), ofwel $H \neq G$, $H' \neq G'$ maar $g \subset H$, $g' \subset H'$ (echt deel). Een symmetriebreuk door interactie die tot een symmetrieverlaging en verhoging leidt die ofwel object-asymmetrisch, ofwel intensiteit-asymmetrisch is.

De classificatie van groepen in functie van causaliteit zou kunnen gebeuren in functie van G en G' , van g en g' , van H en H' , en in functie van de relatie R , verbonden met transformaties in een metaruimte die G en G' omvat.

3. Een wet is een verhouding tussen n variabelen (minstens twee) die invariant wordt gehouden onder variatiegroepen voor de variabelen, $(x)(Fx \rightarrow Gx)$.

Die variatiegroepen omvatten zeker voor x alle permutaties in de werkelijke wereld (de symmetrische groep), ook voor F en G alle combinaties met reële eigenschappen in de werkelijke wereld, voor $\rightarrow$ alle transformaties die de pijl invariant houden (die zelf een transformatie van G in G voorstelt) en bovendien alle permutaties die van werkelijke naar fysisch mogelijke werelden leiden.

De centrale vraag is of (en hoe) inhoudelijke restricties op die groepen uit de idee zelf van wetmatigheid kunnen worden afgeleid.

4. De werkelijkheid vertoont systemen in verschillende lagen, wordt verbonden door causale netwerken en gehoorzaamt aan wetten (beter -minder antropocentrisch gezegd - realiseert zekere structurele invarianten). Hoe hangen systeem-zijn, oorzaak- en gevolg-zijn en wetten realiseren inhoudelijk samen? Kunnen daaruit restricties op de soort systemen, wetten en oorzaken die in de totaalwerkelijkheid voorkomen, volgen? Grof is niet in te zien hoe zonder wetten, systemen mogelijk zijn. Oorzaken en wetten impliceren elkaar echter niet wederzijds (integendeel: ze drukken deelsymmetrieën en symmetriebreuken uit).

De classificatie van de groepen, als ze op wijsgerige basis gebeurt, zou gefundeerd moeten zijn op hun relaties met systeem, oorzaak en wet. Wij komen daar op terug. Voorlopig zullen we na het schetsen van het uitgangspunt van de deductieve weg nu de inductieve weg begaan.

9.2. De Galilei-groep

9.2.a. Omschrijving en belang van de Galilei-groep

De klassieke mechanica blijkt te kunnen worden gekarakteriseerd door een specifieke groep, de Galilei-groep, de relativistische mechanica door een veralgemening van deze groep (Lorentz en Poincaré). De kwantummechanica blijkt ook een intieme relatie met deze Galilei-groep te vertonen. Daarom ligt het voor de hand de inductieve weg te beginnen met een antwoord op de volgende vraag: *waarom realiseert een laag (of een deel) van de werkelijkheid de Galilei-groep?* L. Lange voert in 1885 het begrip 'inertiaalsysteem' in om de klassieke newtoniaanse wetten te kunnen formuleren zonder beroep te doen op een absolute ruimte-tijd. Laat men aannemen dat drie massapunten vanuit een gelijke oorsprong worden geworpen en vrij aan zichzelf worden overgelaten (zonder inwerking van krachten), dan is het daarmee overeenkomende coördinatiesysteem (ten opzichte waarvan de drie punten verschillende rechte lijnen beschrijven) een inertiaalsysteem. Het beginsel van inertie zegt dat ieder vierde massapunt vrij aan zichzelf overgelaten zich eveneens rechtlijnig en eenparig (niet versneld) ten opzichte van dit coördinatiesysteem beweegt. Galilei-transformaties zijn transformaties die inertiaalsystemen in

inertiaalsystemen omzetten.

Primas zegt "the most general group of space-time transformations which respect the homogeneity of space-time and the isotropy of space, and which leaves the time interval between every pair of events invariant is a 10 parameter group, called the Galilei group".³⁵

Men kan de Galilei-groep formuleren als een verzameling van transformaties van coördinatenstelsels (1) of als een verzameling van veranderingen van bewegingstoestanden van objecten (2).

De Galilei-groep bestaat uit

1. Ruimtelijke verplaatsing:
Van een plaats q beweegt een voorwerp naar een plaats $q+a$ (object-formulering).
Men gaat van een inertiaalsysteem I over naar een inertiaalsysteem I' dat met een vector a verschoven is.
De tijd blijft constant. $T \rightarrow t'$, de plaats (zoals gezegd) gaat van q tot $q+a$ over, de $mv(=p)$, het momentum blijft constant.
2. Verplaatsing in de tijd:
 $p \rightarrow p, q \rightarrow q, T \rightarrow t + \tau$
Ook dit kan in objecttaal of coördinatentaal worden uitgedrukt.
3. Omwenteling of rotatie:
 $p \rightarrow Rp \quad q \rightarrow Rq \quad t \rightarrow t$
4. $p \rightarrow p + W \quad q \rightarrow q \quad t \rightarrow t$

De algemeenste vorm van een Galilei-transformatie is $q = Rq + \bar{v}t + a$ en $t' = t + b$. Ze hangt van 10 parameters af: 3 voor a , de ruimte-tijd vector, 3 voor de draaiing R in de 3-dimensionale ruimte, 1 voor tijd (8), 3 voor de relatieve snelheid (W).

De Galilei-groep heeft een aantal subgroepen:

1. de subgroep der ruimte transformaties G_T
2. de subgroep der draaiingen G_D
3. de subgroep der tijdsverplaatsingen G_t
4. de subgroep der versnellingen G_0

1, 3 en 4 zijn abeliaanse groepen, 2 niet. $G_T \times G_D$ (1x2) en $G_t \times G_0$ (3x4) zijn ook subgroepen. $G_T \times G_0$ is de maximale abeliaanse invariante subgroep. G is dus geen eenvoudige groep, ze kan in subgroepen worden ontleed. $G_{gal} = (G_D \times G_T) \times (G_t \times G_0)$.

9.2.b. Essentiële en accidentele eigenschappen ervan

Vóór we met de wijsgerige bespreking van de Galilei-groep beginnen moeten minder essentiële van meer essentiële eigenschappen worden gescheiden.

1. De groep zou veel meer parameters hebben in een n -dimensionale ruimte. Dat men zich in de drie-dimensionale ruimte verplaatst is niet essentieel voor de Galilei-groep als zodanig.
2. De groep is een continue he-groep omdat de euclidische ruimte een continue topologie heeft. De Galilei-groep kan echter ook in een discontinue verzameling worden bepaald.

Het is wel in se belangrijk dat de fysische werkelijkheid door he-groepen kan worden uitgedrukt. Juist zoals het belangrijk is dat ze door een euclidische ruimte kan worden beschreven. Maar die

³⁵ Primas, p.70. Zie verder: Bacry en Lévy-Leblond 1605-1617; Berzi en Gorini 1518-1524; Lévy-Leblond: 'Galilei group and Galilei invariance'.

eigenschappen verdienen een afzonderlijke studie.

We noteren nu de typische eigenschappen van de vier subgroepen van de galileaanse groep.

1. Een verplaatsing in de tijd is structureel gelijk aan een verplaatsing in de ruimte: het enig wezenlijk verschil is dat er meer dimensies in het spel zijn in het ene geval (ruimte) dan in het andere geval (tijd).
2. De draaiing heeft twee unieke eigenschappen: terwijl de versnelling alleen op het moment (de impuls) werkt, en de verplaatsing alleen op de plaats, werkt de draaiing op plaats en versnelling tegelijk. Ze is *niet abeliaans*. Geen van de andere subgroepen is een cyclische groep, maar de G_D is een cyclische groep: voor iedere rotatie R is er een n , zó dat $R^n = I$.
3. De snelheid (afstand per tijdseenheid) wordt bepaald door een relatie tussen plaatsen (de afstand) en tussen tijden (begin en einde van de beweging). Ze is een relatie tussen deze twee relaties (en ze kan volledig worden geordend). Versnelling is een wijziging van deze relatie tussen twee relaties, de ene bepaald in het veld van G_T en de andere bepaald in het veld van G_t .

Door deze drie opmerkingen zijn de vier subgroepen op een unieke manier gekarakteriseerd. De karakterisering staat een veralgemening van de Galilei-groep toe. Een Galilei-groep bestaat uit het product van vier subgroepen.

9.2.c. Wijsgerige veronderstellingen van de vier subgroepen

1. De subgroep G_t veronderstelt dat de werkelijkheid in haar totaliteit volgens één dimensie volledig is geordend: alles wat het geval is, is gelijktijdig, voortijdig of natijdig. qt bepaalt een gelijkwaardigheidsklasse die de toestand van alle delen van de werkelijkheid bevat, vt en nt bepalen een orde die alle gelijkwaardigheidsklassen én al hun elementen volledig ordent. Die orde kan eindig of oneindig, dicht of continu of discontinu zijn. Ze hoeft niet - zoals in de klassieke mechanica - structureel te zijn met R (de orde der reële getallen - hier duidelijk verschillend van de R (=rotatie)).
2. De werkelijkheid is ook volledig geordend volgens n (klassiek 3) dimensies die volledig orthogonaal staan op elkaar en op t . Deze ordeningen ordenen echter objecten, en niet toestanden. Een moment omvat alle objecten; een object omvat alle momenten. Weer kunnen deze ordeningen continu of discontinu zijn, eindig of oneindig, open of gesloten. De allereenvoudigste werkelijkheid zou één tijd en één ruimtedimensie bevatten; de meest complexe vele tijd- en ruimtedimensies, maar *verschillend in aantal* (met meer ruimte dan tijdsdimensies).
3. Bovendien (!) wordt de werkelijkheid op een hoger niveau ook nog geordend dat de twee vorige ordeningen verbindt. De snelheden (relaties tussen tijdsintervallen en ruimteintervallen) zijn volledig geordend. Het spreekt vanzelf dat een veralgemening van ruimte en tijd ook een veralgemening van snelheid meebrengt. De zuiver galileaanse transformatie is volledig analoog aan verplaatsing in de ruimte en verplaatsing in de tijd: ze is verplaatsing in de ruimte der snelheden.
4. De ingewikkeldste bewerking van de vier onder analyse is zeker de rotatie of draaiing (ze heeft ook zeer speciale eigenschappen: de combinaties van rotaties zijn niet abeliaans, de rotaties werken op verschillende ordeningen tegelijk in en ze zijn cyclisch). Zeer algemeen gesproken is een rotatie een verandering van richting van een deel van de werkelijkheid, zonder dat de nabuur-relaties van dat deel worden veranderd. Typisch

voor een rotatie is niet alleen dat $R^n = I$, maar ook dat er een R^m bestaat zó dat $R^M = 'M$ (weerspiegeling langs een punt, lijn of vlak).

De veronderstellingen die zojuist werden vermeld stellen een absolute ruimte (R_3), absolute tijd (T), een $R_3 \times T$ (tijd-ruimte als cartesiaans product van R_3 en T), een absolute beweging (in newtoniaanse zin) voor.

We weten dat, juist door het feit dat de Galilei-groep de werkelijkheid onveranderd laat, géén absolute tijd, absolute ruimte, absolute snelheid en absolute draaiing kunnen worden bepaald.

Alle invarianties onder groepen hangen samen met het onwaarneembaar zijn van effecten. Om te kunnen zeggen dat een bepaalde transformatie onwaarneembaar is, moet men ze echter als reëel stellen en de werkelijkheid waarin ze onwaarneembaar is, zó karakteriseren dat ze niettegenstaande die onwaarneembaarheid toch werkelijk is.

9.2.d. Methoden ter verklaring van de Galilei-groep

Om te begrijpen waarom de Galilei-groep de werkelijkheid moet karakteriseren in een zeker gebied en met een zekere benadering kan men de volgende punten onderzoeken.

1. Vergelijk een werkelijkheid waarin de vier subgroepen de verschijnselen invariant laten met een werkelijkheid waarin maar één of twee of drie van hen dit doen.
2. Vergelijk een werkelijkheid waarin met iedere operatie van één van de subgroepen, een operatie van één van de overige samengaat, met een werkelijkheid waarin de onafhankelijkheid bestaat die onze realiteit kenmerkt.
3. Breng de resultaten van 1 en 2 in verband met het systeem zijn, van totaliteit en delen, met de causaliteit in de realiteit en met de wetmatigheid.

9.2.e. Epistemologisch-praxiologische justificaties

De weg die zich opdringt gaat langs de stelling van E. Noether.³⁶ Noether bewees dat de 10 grootheden die in de klassieke mechanica worden geconserveerd afleidbaar zijn uit de invariantie van het actie-integraal en de Lagrange-functie tegenover de infinitesimale transformaties van de Galilei-groep met 10 parameters.

Zijn bewijs in het algemeen stelt dat voor een mechanisch probleem er steeds n geconserveerde grootheden bestaan als de bewegingsvergelijking voor die grootheden invariant is onder de continue Galilei-transformatiegroep met n parameters van de continue vier dimensionale ruimte-tijd.

Dit geldt ook voor de deelgroepen van de Galilei-groep. De Lagrange-functie en de actie-integraal is slechts invariant op een ijk-transformatie na. Door omijking bekomt men voor G_T , G_D en G_t het behoud van totaalimpuls, totaal draai-impuls en totaalenergie.

K. Mainzer³⁷ brengt het resultaat van Noether ook met de wijsbegeerte in verband. Hij stelt voor - met Kant - de conservatiebeginselen uit kennistheoretische uitgangspunten te laten volgen. Zelfs al zou het waar zijn dat ervaring niet mogelijk is zonder ruimte, tijd en het behouden van iets als constant in de ruimte-tijd, dan volgt daaruit echter nog niet dat die ruimte-tijd euclidisch driedimensionaal zouden zijn (en juist 10 geconserveerde grootheden opleveren) en evenmin dat juist impuls, draai-impuls en totaalenergie constant zouden zijn. De subjectief-epistemologische deductie van Mainzer is dus hachelijk onvolledig. Men zou bij Kant zelf te rade moeten gaan om na te gaan in hoeverre vanuit zijn ervaringsanalyse de conservatie van de vermelde grootheden

³⁶ Noether 1918.

³⁷ Mainzer, pp.321-323.

zou volgen. Zelfs al sloeg men deze weg in, stoot men toch op het feit dat Noether van de invariantie onder de Galilei-groep, met behulp van de klassieke Hamilton-vergelijkingen tot de behoudstelling komt. De omgekeerde stellingen (die zouden besluiten dat voor ieder systeem dat de behoudswetten van de klassieke mechanica heeft, de invariantie van de wetten ervan onder de Galilei-groep zou gelden) bewijst zij niet. Ik geloof niet dat ze bewezen zijn.

De weg die de rechtvaardiging van de Galilei-groep in de behoudseigenschappen zoekt (die eruit volgen) maakt gebruik van wiskundig centrale stellingen en zou dus de eenheid van wijsbegeerte en wetenschap schitterend bewijzen. Een grondiger exploiteren van de kennistheoretische uitgangspunten (zijn de behoudswetten mogelijksvoorwaarden voor alledaagse ervaring, voor de toepassing van inductieve strategieën, voor andere aspecten van de wetenschappelijke methode of voor de mogelijkheid van actie) dringt zich op. E. Rosen heeft dit expliciet beproefd. Het blijkt inderdaad plausibel dat als verplaatsing in de tijd en verplaatsing in de ruimte, zowel als draaiing, de resultaten van observatie en experiment zouden beïnvloeden, de inductieve methode niet tot bruikbare kennis zou kunnen leiden. Behoud van impuls, draai-impuls en energie lijken dus nodig om inductieve kennis mogelijk te maken. Hetzelfde besluit volgt uit de noodzaak tot actie. Om te kunnen inwerken met instrumenten op de werkelijkheid moeten de eigenschappen van die instrumenten globaal dezelfde blijven terwijl ze worden toegepast. Hoe verder de invloed reikt, des te globaler moet de invariantie zijn.

Het schijnt dus mogelijk, anders dan Mainzer, een niet kantiaanse, en toch kennistheoretische en praxiologische deductie van de behoudswetten te geven.

Die deductie zou ook direct tot de subgroepen van de Galilei-groep kunnen leiden:

- om voor de toekomst en het verleden te kunnen veralgemenen moeten de eigenschappen van de werkelijkheid bij verplaatsing in de tijd invariant zijn;
- om in de ruimte te kunnen veralgemenen moeten de eigenschappen van de werkelijkheid bij verplaatsing in de ruimte invariant zijn;
- om in verschillende richtingen te kunnen handelen en vanuit basissen die hun snelheid wijzigen moeten de eigenschappen van de werkelijkheid onder draaiing en versnelling invariant zijn.

Het is niet onmiddellijk duidelijk dat handelen vanuit versnellende, vertragende en richtingwijzigende basissen en observeren of experimenteren daaruit voor alle actie en kennis essentieel zijn, maar men kan daartoe waarschijnlijk wel besluiten.

9.2.f. Ontologisch-metafysische justificaties

Deze kennistheoretische of praxiologische deductie van de Galilei-groep (die zeker doet denken aan de subjectieve rechtvaardiging van de groep als zodanig) is echter niet wijsgerig bevredigend. We willen begrijpen waarom de werkelijkheid is zoals ze is. Antwoorden dat ze is zoals ze is omdat we ze anders niet zouden kunnen kennen of/en erin niet zouden kunnen handelen, hoe belangwekkend dit ook is (en het *is* belangwekkend) zou alleen een verklaringsgrond geven als we het sterk antropologisch beginsel dat soms - ten onrechte - in de kosmologie wordt gebruikt, ook hier zouden toepassen.

We moeten integendeel ontologisch te werk gaan: kan men uit het zijn, oorzaak-zijn, systeem-zijn en wetmatig-zijn van de werkelijkheid de geldigheid van de Galilei-groep afleiden?

Joe Rosen in zijn 'Extended mach principle'³⁸ geeft een schets (niet meer) van een deductie voor

³⁸ Rosen 1981.

de Galilei-groep (spatial displacement symmetry, temporal displacement symmetry, rotation symmetry, Boost symmetry - hij gaat zelfs veel verder en leidt CPT en benaderde P, C, T en CP af). Hij vertrekt van het postulaat dat het heelal in zijn totaliteit de evolutie van alle subsystemen erin bepaalt. Homogeniteit in de ruimte en in de tijd van het totale heelal, isotropie van het totale heelal en equivalentie van alle tegenover elkaar eenparig bewegende (niet versnelde) referentiekaders legitimeert de Galilei-groep.

De deductie van Rosen - hoewel ontologisch - is even onbevredigend als de subjectieve deductie van Mainzer. We beproeven een andere.

- 1.a. Laten wij aanvaarden dat U een systeem is dat zijn deelsystemen $U_{1...n}$ bepaalt. Indien de wetten van U zouden veranderen bij overgang van een groep van deelsystemen naar een ander dan zou daarvoor, bij ontstentenis van een kwalitatief verschil tussen die groepen, geen voldoende grond bestaan. Als de U_i dus gelijkwaardige systemen zijn, moeten de natuurwetten onveranderd zijn na overgang van U_i tot U_j . G_T is gelegitimeerd.
- 1.b. Op dezelfde manier wordt G_t gelegitimeerd als de (?) perioden van het heelal door het totale heelal bepaald zijn.
- 1.c. U moet zijn deelsystemen bepalen (vandaar 1 en 2) maar er moeten veranderingen van de U_i - in hun totaliteit) mogelijk zijn die a) geen externe veranderingen veroorzaken en b) wel externe veranderingen veroorzaken. In de twee gevallen moeten de wetten voor delen van delen U_{ii} invariant blijven. Zo dit niet het geval zou zijn dan zou het heelal geen deelsystemen met relatieve autonomie kunnen hebben (en dan zelf ook geen systeem kunnen zijn). Dit rechtvaardigt G_R .
- 1.d. Moesten de wetten van U_{ii} veranderen door een wijziging van de snelheid van U_i (d.w.z. door een wijziging van de manier waarop de relatie van U_i tot U verandert) dan zou de afhankelijkheid van U_i ten opzichte van U zeer sterk zijn. Dit zou neerkomen op een opheffen (1). Als snelheidswijziging de wetten verandert, dan kunnen ook de wetten van plaats tot plaats veranderen.

In 1.a. tracht men de geldigheid van de Galilei-groep af te leiden van enerzijds het systeem-zijn van (dat op gelijke manier in alle U_i bepalend moet optreden) en van het systeem-zijn van U_i (dat op gelijke manier in alle U_{ii} moet optreden en niet volledig bepaald zijn door $U-U_i$, of/ en wijzigingen in de relaties tussen (U_i , $U-U_i$)).

Letterlijk kan dit alles slechts bij bepaling waar zijn als zowel U als $E(U)$ (de evolutie van U) een structuur hebben (wat volgt uit het zelfverkarend karakter van U) dan kunnen R_T en R_t niet letterlijk gelden. Als U een veld is dat alle U_i doordringt en dat niet isotroop is (wat volgt uit de structuur van U) dan kan G_R niet exact gelden. En als de eerste drie subgroepen niet exact geldig zijn, is de vierde het ook niet.

We staan hier dus eigenlijk voor een aforie:

1. U en U_i moeten systemen zijn
2. en kunnen niet in alle delen van U en van U_i even sterk en op gelijke manier systemen zijn.

Strikt contradictorisch is dit niet. Maar de afleiding verliest er wel haar duidelijk karakter door.

2. In zoverre een heelal dat een systeem is, moet gekenmerkt zijn door stabiele universele wetten, kan men wel afleiden dat:

- a. deze wetten op alle plaatsen geldig moeten zijn;
- b. deze wetten op alle ogenblikken geldig moeten zijn;
- c. deze wetten voor alle verschillende relaties tussen de deelsystemen geldig moeten zijn;
- d. deze wetten voor alle verschillende wijzigingen van de relaties van de deelsystemen tot elkaar geldig moeten zijn.

(a geeft G_T , b geeft G_b , c geeft G_R en d geeft G_0).

Als het beginsel van determinisme uit de zelfbepaling en zelfverklaring van het heelal volgt, dan moeten uit de toestand op t_n en de snelheden (= tendensen tot wijziging op t_n) alle toestanden afleidbaar zijn: dit veronderstelt het universeel geldig zijn van differentie of differentiaalvergelijkingen. De vraag moet worden gesteld of daaruit een exacte of partiële geldigheid van de Galilei-groep afleidbaar is.

De vraag moet ook worden gesteld of de zelfverklaring van de totaalwerkelijkheid een beginsel van determinisme insluit.³⁹

3. Laten wij aanvaarden dat het heelal een causaal netwerk is. Dan moet de vraag worden gesteld of uit causaliteit, de Galilei-groep volgt. Of zal causaliteit als productie, symmetriebreking zijn? En dus ook als zodanig optreden in betrekking tot de Galilei-groep?

Causale relaties zijn lokaal. In zoverre ze echter uit interacties van systemen en krachten nieuwe systemen en krachten moeten voortbrengen moet infinitesimaal tijdens het productieproces, de Galilei-groep gelden (op verschillende ogenblikken, in verschillende plaatsen, in andere relaties tot de omwereld en in verschillende bewegingstoestanden moeten de voorwaarden van het productieproces geldig blijven).

Dit is echter niet tegenstrijdig met het feit dat de globale geldigheid van de Galilei-groep niet volgt uit de causaliteitsidee, omdat die idee essentieel lokaal is (ook al wordt ze over het ganse systeem uitgestrekt).

Laten we echter aannemen dat een asymmetrie en een irreversibiliteit voor het causaal proces bepalend is, dan nog moet het gelden dat voor andere dan de causaal actieve, variabelen worden verondersteld, wil het causaal proces zich kunnen voordoen.

Als natuurlijk causaliteit zelf een herstel van gebroken symmetrie is, dan kan (moet niet) dit een herstel van gebroken symmetrie van de Galilei-groep zijn. Dit is echter een meer mechanisch gevolg van een bepaling. Tot nu toe werd de derde methode op p.36 aangekondigd, gevolgd. We stellen de uitwerking van methoden 1 en 2 op p.36 uit tot later.

Men denkt gewoonlijk dat de Galilei-groep is geassocieerd met de klassieke mechanica alleen. Dit is een vergissing. Resultaten van Bargman en Whitman, geanticipeerd door Weyl en Wigner tonen dat ze in alle delen van de werkelijkheid (in de macrowerkelijkheid van de relativiteit, in de microwerkelijkheid van de kwanta, in de mesowerkelijkheid van de klassieke mechanica) geheel of gedeeltelijk waar is. De bewijzen van de te citeren beweringen kunnen alleen in hun wijsgerig belang worden getoond als we verdere groepen metafysisch hebben geanalyseerd. Maar het is nu reeds belangrijk de universele toepasbaarheid van de Galilei-groep te tonen omdat een metafysische deductie van een slechts lokaal geldige groep misleidend zou lijken.

Hans Primas noemt de groep waaronder een tijd-ruimte continuüm invariant is de kinematische groep. Een ruimte-tijd wordt gekarakteriseerd door drie symmetrieën:

1. alle ogenblikken in de tijd zijn gelijkwaardig;
2. alle punten in de ruimte zijn gelijkwaardig;

³⁹ Earmans boek geeft hier belangrijke restricties.

3. alle richtingen in de ruimte zijn gelijkwaardig.

($3 \rightarrow 2$, met $2 \rightarrow 3$).

De enige kinematische symmetrieën die 1, 2 en 3 realiseren zijn de aristotelische, de galileaanse en de einsteiniaanse.⁴⁰ De ruimte is een driedimensionaal E^3 (euclidische afstand) met de 6-parameters euclidische groep als symmetrie (3 parameter translatie, 3 parameter rotatie) groep. Tijd is euclidische E^1 met 1-parameter translatiegroep.

De aristotelische kinematiek veronderstelt een absolute ruimte en een absolute tijd in $E^3 \times E^1$.

De Galilei-kinematiek maakt ruimte relatief en houdt tijd absoluut. Hier hebben twee gebeurtenissen (q_1, t_1) en (q_2, t_2) slechts een exact bepaalde afstand als $t_1 = t_2$.

De Galilei-groep is de meest algemene groep van ruimte-tijd transformaties die de isotropie van de ruimte, de homogeniteit van de ruimte-tijd en de tijdsafstand tussen twee gebeurtenissen invariant houdt.

Als tijd en ruimte beide worden gerelativeerd (zoals in de einsteiniaanse natuurkunde) dan bestaat de tijdsafstand alleen exact als $q_1 = q_2$.

De algemeenste groep die deze structuur invariant houdt is de Poincaré-groep (= inhomogene Lorentz-groep).

De einsteiniaanse ruimte-tijd heeft maximale symmetrie: een transformatiegroep die de tweede macht van de afstand tussen oneindig nabije punten invariant houdt in een ruimte van n dimensies kan hoogstens $n(n+1)/2$ parameters hebben (hier is $n=4$, zodat $4 \times 5/2 = 10$). De Poincaré-groep heeft exact tien parameters. Als de constante $c = \alpha$ dan wordt de Poincaré-groep de wiskundig meer complexe Galilei-groep.

De kinematische groep van de pionier kwantummechanica is de projectief unitaire representatie van de Galilei-groep op de Hilbert-ruimte van toestandvectoren.

In 1962 bewijst A.S. Wightman dat ieder elementair Galilei-systeem met positieve massa kan worden gelokaliseerd in de ruimte-tijd op een Galilei invariante manier.

G.N. Machey⁴¹ bewijst dat voor een Galilei-systeem een imprimitiviteitsstelsel voor de driedimensionale euclidische groep kan worden bepaald en de drie positieoperatoren kunnen worden afgeleid.

V. Bargman (1954) bewijst dat de Schrödinger-vergelijking voor vrije niet relativistische partikels wordt gegeven door een onherleidbare projectieve representatie van de Galilei-groep.

Weyl zegt al in 1928 dat de kinematische structuur van een natuurkundig systeem wordt uitgedrukt door een onherleidbare abeliaanse groep van unitaire stralen rotaties in de systeemruimte.

De Galilei-groep⁴² geeft ook de conservatie van massa.

9.3. Lie-groepen

9.3.a. Inleiding

De Galilei-groep - zoals vermeld - is zelf een continue groep met een oneindig aantal verschillende operaties, in de klassieke continue ruimte (infinitesimale verplaatsingen in ruimte en tijd, infinitesimale rotaties of versnellingen, negatief of positief). Ze is niet noodzakelijk - dit werd ook vermeld - een continue groep zolang er geen intrinsieke legitimatie voor de continuïteit van de ruimte-tijd bestaat.

Zowel eindige als oneindige groepen, en zowel discontinue groepen als continue groepen moeten

⁴⁰ Bacry en Lévy Leblond 1968, Gorini 1971.

⁴¹ G.N. Machey 1963a.

⁴² Bargman 1954.

in de werkelijkheid zijn gerealiseerd. Dit zal men trachten te bewijzen.

Door dit spoor in te slaan, verlaat men eigenlijk de denkrichtingen begonnen met de Galilei-groep. Vanuit de Galilei-groep zou het natuurlijk zijn geweest de Lorentz-groep, de Poincaré-groep en de unitaire en symmetrische groepen typisch voor de kwantummechanica te bekijken (om daarbij te tonen waarom de werkelijkheid representaties van deze vier realiseert). Hoe natuurlijk dit ook lijkt, toch zijn al deze groepen complexe groepen die tegelijk vele verschillende invarianties realiseren. Het discreet karakter van de puntgroepen en het continu karakter van de Lie-groepen zijn algemene karakteristieken die door zeer verschillende soorten groepen worden gerealiseerd. Om die reden is het toch geraden een algemene presentatie van continue en discontinue groepen te beproeven, vóór tot fysisch meer realistische groepen over te gaan. Eerst zullen continue en daarna discontinue groepen worden bekeken. Voor beide zullen trouwens zeer concrete voorbeelden worden aangehaald: voor de continue groep een speciaal voorbeeld (de isospin-groep) en voor de discontinue groep een ander speciaal voorbeeld (de kristalsymmetrieën). Het zijn in de twee gevallen kwantumtheoretische voorbeelden (het eerste minder klassiek dan het tweede). Maar ettelijke andere zouden mogelijk geweest zijn (b.v. de Galilei-groep voor een continue én voor een discontinue ruimte (de unitaire groep, de volledige groep van rotaties in 2, 3 en n dimensies).

9.3.b. Continue groepen en hun wijsgerige betekenis

De elementen van een continue groep hangen af van $a_1...a_r$ parameters die een continu aantal verschillende reële waarden kunnen aannemen. Om een groep te hebben moeten ze aan de voorwaarde $G(a_1a_2...a_r)G(b_1b_2...b_r)=G(c_1...c_r)$ voldoen, waar $c_i=f_i(a_1a_2...a_r, b_1b_2...b_r)$. De functies f moeten aan een aantal voorwaarden voldoen (minstens differentieerbare functies van de parameters zijn).

Een continue groep met $a_1...a_2$ parameters heeft een oneindig aantal elementen. Men kan echter opnieuw - zoals voor eindige groepen - de studie ervan vereenvoudigen.

Laat a de reeks $a_1...a_2$ voorstellen. Laat $T(\underline{a})$ een representatie van G in een ruimte L zijn.

Bij conventie kan men de r parameters zo kiezen dat $T(0,0...0)=1$ (met 1 de eenheid van de groep). Als (!) alle parameters 'klein' zijn, dan kan men, in eerste benadering, $T(\underline{a})$ gelijk stellen aan

$$1 + \sum_{i=1} a_i X_i$$

(waar de x_i vaste lineaire operatoren zijn die niet afhangen van $\underline{a}$).

De eindige $T(\underline{a})$ worden volledig bepaald door de operatoren a_j en de infinitesimale operatoren x_i (die men kan zien als de partiële afgeleide

$$\left[\frac{\delta}{\delta a_i} T(\underline{a}) \right]_{a=0}$$

$$(X_i = \lim_{a_i \rightarrow 0} \{T(0,0...a_i...0)-1\} / a_i).$$

De eindige transformaties kunnen dus worden opgebouwd uit de infinitesimale transformaties in de omgeving van de eenheidsoperator.

De essentiële eigenschappen van de infinitesimale operatoren zijn:

1. als twee representaties van een groep G dezelfde infinitesimale operatoren hebben zijn ze identisch.
2. de infinitesimale operatoren voldoen aan de commutatierelaties $[X_i X_j] = \sum_t c_{ij}^t X_t$ (waar de 'structuurconstanten' c_{ij}^t dezelfde zijn voor alle representaties van G).

D.w.z. de infinitesimale operator van het product van twee groeps-elementen is juist de som van de infinitesimale operatoren van de twee termen. De commutator van iedere

twee infinitesimale operatoren moet een lineaire combinatie zijn van de verzameling van de operatoren.

Tot hier werd slechts de bepaling van de Lie-groep voorgesteld.

De essentiële kenmerken ervan zijn:

1. alle elementen van de groep hangen van een eindig aantal basiselementen af (de parameters);
2. en van de 'zeer kleine' transformaties die ze veroorzaken in de nabijheid van de eenheid (d.w.z. van de elementaire en minimale wijzigingen, de partiële afgeleiden ten opzichte van één parameter die, met de andere zero, een positieve waarde aanneemt);
3. de elementaire transformaties hangen lineair van elkaar af.

Lie 1883⁴³ noemt een groep continu als al haar transformaties door het oneindig maal herhalen van oneindig kleine transformaties kunnen worden gevormd.

Als men de veranderingen die zich in de werkelijkheid voordoen kan construeren vanuit een reeks zeer kleine veranderingen die telkens onafhankelijke aspecten treffen, terwijl die kleine veranderingen zelf in een constante en lineaire relatie tot elkaar staan, dan kan men de werkelijkheid door Lie-groepen beschrijven. Om dat te kunnen doen moet men

1. de transformaties kunnen ordenen,
2. volgens ordeningsbeginselen die relatief onafhankelijk (niet orthogonaal!), niet holistisch ten opzichte van elkaar zijn,
3. zo dat de reële transformaties, opbouwbaar zijn uit minimale.

De continuïteitseis (zo sterk bij Leibniz) voor transformaties komt neer op een restrictie op de maat van de transformaties. In zekere zin mogen ze noch te radicaal, noch te globaal, noch te heterogeen zijn.

Indien de werkelijkheid geen enkele Lie-groep zou realiseren, dan zouden de veranderingen erin ofwel alle 'groot' zijn, ofwel alle 'globaal' (alle delen betreffend), ofwel alle discontinu, ofwel zonder verband met elkaar.

Om een werkelijkheid te hebben waarvan ook de veranderingen een systeem zijn, is de realisatie van een he-groep in en door die veranderingen nodig.

Lie-groepen zijn gebaseerd op de ideeën van gelijkwaardigheid en van nabijheid. Het zijn topologische groepen. Hoewel het begrip 'Lie-groep' specialer is dan het begrip 'topologische groep'. De legitimatie van het gelden van Lie-groepen in de werkelijkheid kan ook - partieel - worden bediscussieerd door het gelden van topologische groepen te ontleden.

Lie-groepen en he-algebras

De hoekimpuls (of momentum) *algebra* heeft de volgende eigenschappen:

$$[J_x J_y] = iJ_z \quad J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

$$[J_y J_z] = iJ_x \quad [J^2 J_x] = [J^2 J_y] = [J^2 J_z]$$

$$[J_z J_x] = iJ_y = 0$$

Vermits J^2 niet alle operatoren commuteert, kan men J_z kiezen en een volledige verzameling van toestanden van ieder systeem vinden die tegelijk eigenfuncties van J^2 en J_z zijn (met eigenwaarden die men J en M kan noemen).

J_x en J_y commuteren niet met J_z , maar men kan combinaties van beide vormen die eenvoudige eigenschappen vertonen:

⁴³ Mainzer, p.215.

$$J_+ = (J_x + iJ_y) \quad J_- = (J_x - iJ_y).$$

$$J^2 \text{ commuteert met } J_+ \text{ en } J_- : [J^2, (J_x + iJ_y)] = [J^2, (J_x - iJ_y)] = 0$$

$$[J_z, (J_x + iJ_y)] = (J_x + iJ_y)$$

$$[J_z, (J_x - iJ_y)] = -(J_x - iJ_y).$$

Om wijsgerig inzicht te krijgen in het belang van deze operatoren moet men eraan herinneren

1. dat de commutator het verschil meet tussen het uitvoeren van twee transformaties in omgekeerde volgorde (d.w.z. de invloed die het resultaat van de ene bewerking op het uitvoeren van de andere heeft);
2. dat het hier gaat over structurele eigenschappen van de groep der rotaties in drie dimensies (waar de rotaties een cyclische groep zijn met evenveel onafhankelijke generatoren als de ruimte waarin ze werken dimensies heeft);
3. dat de commutatoren van twee generatoren, gelijk zijn aan i vermenigvuldigd met de derde generator betekent dat de interactie van twee generatoren wordt bepaald door de derde. Het is dus een sterke eenheid van de bewerkingen van de cyclische groep;
4. dat de Casimir operator J^2 , de som van de tweede machten van iedere generator commuteert met alle generatoren betekent dat de interactie tussen twee generatoren wordt opgeheven door machtsverheffing én interactie tussen drie generatoren.

4 volgt én wiskundig, én wijsgerig uit 3. De generatoren kunnen als infinitesimale operatoren worden geïnterpreteerd⁴⁴ maar men kan zich ook onthouden van die interpretatie en eenvoudig de gevolgen (fysisch bruikbaar) van de drie commutatoreigenschappen toepassen. Dan denkt men enkel aan 3 en 4, en maakt abstractie van 2.

De vraag: 'Waarom moeten systemen in de werkelijkheid zich gedragen volgens Lie-groepen?' kan worden voorbereid door de ontleding van de vraag 'Waarom moeten systemen in de werkelijkheid zich gedragen volgens he-algebra's?'

Het antwoord daarop wordt gegeven door 3 en 4: de interactie van de transformaties kan worden uitgedrukt als gelijk aan een andere transformatie. Zonder infinitesimalia te moeten invoeren kan men een deel van de afhankelijkheid tussen transformaties die voor he-groepen kenmerkend is, ook bereiken.

Vertrekkend vanuit de idee van he-algebra die algemener is dan de idee van Lie-groep en die toch op zichzelf ontologisch kan worden gerechtvaardigd, kan nu worden overgegaan naar de concrete Lie-groep die we wensten voor te stellen.

Laten we een systeem beschouwen dat in een neutron of een proton toestand kan zijn (vóór het ontdekken van mesonen of vreemde partikels). Laat de operator a_p^+ en a_n^+ het doen ontstaan van een proton en een neutron aanduiden, en a_n (respectievelijk a_p) het vernietigen ervan. Voorlopig wordt over spin en ruimte niet gesproken.

Een algebra met een product $[]$ is een he-algebra als

1. $[a, b] + [b, a] = 0$
2. $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0.$

Iedere associatieve algebra wordt een he-algebra door $[a, b] = ab - ba$ te stellen.⁴⁵

Dit is een uiterst speciaal geval; op het eerste gezicht heeft het geen algemene wijsgerige betekenis. Toch heeft het die door zijn simpele structuur wel:

1. een radicale vorm van verandering wordt ingevoerd (extreem discontinu): vernietiging en schepping;
2. in het allereenvoudigste systeem dat (subjectief) informatie kan bevatten (twee tekens zijn nodig en voldoende om alle Turing-bewerkingen uit te voeren) en causaliteit kan

⁴⁴ H.J. Liphin, 'Lie-groups for pedestrians', p.5.

⁴⁵ Freudenthal, p.24.

vertonen (tussen twee verschillende elementen).

Alle bilineaire producten van de vier scheppings- en vernietigingsoperatoren die de allerfundamenteelste eigenschap: het aantal partikels constant houden vertonen, vormen een he-algebra. Dit is in se - zoals dadelijk te tonen - wijsgerig belangrijk.

1. $a_p^+ a_p^+$ vernietigt een neutron en schept een proton in dezelfde staat (m.a.w. zet een neutron in een proton om).
2. $a_n^+ a_p^+$ zet een proton in een neutron om.
3. $a_p^+ a_p^+$ en
4. $a_n^+ a_n^+$ wijzigen niets. Ze tellen het aantal protonen en neutronen.

Vermits de combinaties van operatoren het aantal protonen en neutronen niet veranderen, als $B = a_p^+ a_p^+ + a_n^+ a_n^+$ (baryon getal), dan commuteert B met alle overige operatoren combinaties.

Als men $a_p^+ a_n^+$ gelijkstelt aan t^+ en $a_n^+ a_p^+$ aan t^- en als $t_0 = 1/2(a_p^+ a_p^+ - a_n^+ a_n^+) = Q - 1/2B$ (vermits de protonen een eenheid lading dragen, en de neutronen geen) gelden de volgende commutatierregels.

$$[t_0 t^+] = t^+$$

$$[t_0 t^-] = -t^-$$

$$[t^+ t^-] = 2t_0$$

Veralgemeend:

$$[a_k a_k^+] = 1$$

$$[(a_k a_m^+)(a_k^+)] = a_m^+ a_n^+$$

Het typische van een Lie-algebra is dat de commutator van twee bilineaire producten een lineaire combinatie blijkt van de leden van de verzameling der bilineaire producten.

Bilineaire producten van scheppings- en vernietigingsoperatoren zijn ontologisch noodzakelijk voor ieder systeem met een eindig aantal soorten die op regelmatige manieren ontstaan en vergaan (1) en wier interactie wordt bepaald door één van zijn elementen.

Sommige operatoren veranderen wel het aantal elementen ($a_k^+ a_m^+$ vernietigen een paar en $a_k a_m$ scheppen een paar) terwijl andere het aantal niet wijzigen ($a_k^+ a_m^+$).

Een andere veralgemening houdt rekening met het feit dat de twee soorten systemen die ontstaan en vergaan in verschillende toestanden k kunnen voorkomen. De commutator-regels blijven dezelfde.

$$B = \sum_k a_{kk}^+ a_{pk} + a_{nk}^+ a_{nk}$$

$$t^+ = \sum_k a_{pk}^+ a_{nk}$$

$$t^- = \sum_k a_{nk}^+ a_{pk}$$

$$t_0 = 1/2 \sum_k (a_{pk}^+ a_{pk} - a_{nk}^+ a_{nk}) = Q - 1/2B$$

Wijsgerig komen ze met de volgende situatie overeen.

Het aantal systemen blijft onder schepping en vernietiging constant.

Systemen van de eerste soort kunnen in systemen van de tweede soort worden omgezet (en omgekeerd).

Het verschil tussen het aantal systemen van eerste en tweede soort hangt direct evenredig af van de lading (een soort energie) en omgekeerd evenredig van het aantal.

Het is natuurlijk (zie hoger) het geval dat deze operatoren op complexe vectoren zijn. Daarvan maken we hier abstractie, om ons alleen af te vragen wat de structuur van de he-algebra metafysisch leert.

Als men de abstracte he-algebra interpreteert door een Lie-groep die op complexe vectoren in een twee dimensionale Hilbert-ruimte werkt (de proton-neutron ruimte) dan is de *Lie-groep* ook een groep van *unitaire* transformaties in een tweedimensionale ruimte.

Met dit feit houden we hier geen rekening. We zijn hier enkel geïnteresseerd in de reden waarom de werkelijkheid Lie-groepen realiseert, in zoverre (in deze paragraaf) ook blijkt dat dit volgt uit de formele structuur van he-algebra's. Men kan nog twee essentiële veralgemeningen ontwikkelen:

1. de he-algebra voor meer dan twee verschillende toestanden;
2. de Lie-algebra met wijziging van het aantal systemen.

Dat er, in de werkelijkheid, Lie-algebra's zullen worden gerealiseerd met eigenschap 2 volgt eigenlijk alleen uit een evolutie-eis: het systeem wordt hierdoor asymmetrisch.

Dat algebra's die de eigenschap 1 realiseren zullen voorkomen is een minder radicale wijziging: het volgt uit een complexiteitseis.

Hoe sterk de werkelijkheid asymmetrisch kan zijn en hoe complex ze minimaal en maximaal moet zijn wordt hier niet ontleed.

1. Een he-algebra voor drie soorten systemen kan als model dienen voor een Lie-algebra met een willekeurig aantal toestanden.

$$B = a_p^+ a_p + a_n^+ a_n + a_\Lambda^+ a_\Lambda$$

$$t_+ = a_p^+ a_n \quad t_- = a_n^+ a_p$$

$$t_0 = 1/2(a_p^+ a_p - a_n^+ a_n)$$

$$B_+ = a_p^+ a_\Lambda \quad B_- = a_n^+ a_\Lambda$$

$$C_+ = a_\Lambda^+ a_n \quad C_- = a_\Lambda^+ a_p$$

$$N = 1/3(a_p^+ a_p + a_n^+ a_n + 2a_\Lambda^+ a_\Lambda) = 1/3B + S$$

De veralgemening die met verschillende toestanden per systeem rekening houdt kan hier worden toegepast, maar zou slechts de formules - die we bovendien niet gebruiken, maar slechts tonen - verzwaren.

De negen operatoren bestaan uit reële operatoren en andere (die enkel tellen hoeveel systemen van een zekere soort aanwezig zijn).

De som van alle teloperatoren is het baryongetal (meer algemeen: het aantal der systemen) dat niet alle operatoren commuteert. Van de overige acht zijn ook t_0 en N teloperatoren waarvan men de vorm kiest in functie van het feit dat de nucleonen (n en p) en de lambda (die al een ander soort systeem, een S_a (=vreemdheids) lading heeft, ($S(n,p)=0$, $S(\Lambda)=-1$). De overige operatoren zijn t_+ , t_- (de isospin die we reeds kennen) en B_+ , B_- , C_+ , C_- die lambdas in nucleonen omzetten en omgekeerd.

$[N, t_0]=0$ en geen enkele andere operator commuteert met beide: het verschil tussen aantallen systemen zonder of met de nieuwe eigenschap S en het verschil tussen het aantal systemen n en p kan onafhankelijk van elkaar worden gemeten. Dit moet zo zijn als de derde systeemsoort op een andere en onafhankelijke manier van de eerste twee verschilt dan zij van elkaar, S zal ook - om dezelfde reden - niet worden geaffecteerd door een creatie of amihilatie van nucleonen (zonder S lading).

$$\begin{aligned} [t_0, t_\pm] &= \pm t_\pm & [N, t_\pm] &= 0 \\ [t_0, B_\pm] &= \pm 1/2 B_\pm & [N, B_\pm] &= B_\pm \end{aligned}$$

$$[t_0 C_+] = \pm 1/2 C_+ \quad [N, C_+] = -C_+$$

Zie verder.⁴⁶

Het is zeker waar dat niet alle situaties waarin drie soorten systemen interageren juist de eigenschappen vertonen die de 'S' en 'isospin' ten opzichte van elkaar kenmerkt. Toch is een groot deel van die eigenschappen uit de idee van creatie, amihilatie, lineaire onafhankelijkheid, conservatie afleidbaar.

2. Laat men de conservatie van het aantal systemen vallen dan kan men toch - en dit is meer dan formeel belangrijk - de wijzigingen die zich kunnen voordoen voorstellen door een he-algebra van zes operatoren die de commutatierregels van gewone hoekmomenta realiseren. Men kan dit feit afleiden uit Weyls opmerking dat alle wijzigingen die in de klassieke kwantummechanica optreden afleidbaar zijn uit het feit dat men ze kan voorstellen door abeliaanse rotatiegroepen in een complexe Hilbert-ruimte. Dit feit kan men zelf weer afleiden uit het cyclisch karakter van de wording.

De zes operatoren zijn:

$$\text{als} \quad S_+ = a_p^+ a_n^+ \quad S_- = a_n a_p \quad \text{en} \quad S_0 = 1/2 [a_p^+ a_p, a_n^+ a_n]$$

$$\text{a.} \quad [S_0, S_+] = S_+ \quad [S_0, S_-] = -S_- \quad [S_+, S_-] = 2S_0$$

$$\text{b.} \quad [t_0, T_+] = t_+ \quad [t_0, T_-] = -t_- \quad [t_+, t_-] = 2t_0$$

$$\text{c.} \quad [t_i, S_k] = 0$$

In systemen met vele fermionen (elementen die geen identische kwantumgetallen kunnen vertonen) kan men twee toestanden k en $-k$ beschouwen en quaspinoperatoren bepalen (die overeenkomen met het bijvoegen of aftrekken van paren partikels met gelijk maar tegengesteld momentum).

$$S_{+k} = a_k^+ a_k^+ \quad S_{-k} = a_{-k} a_{-k}$$

$$S_{0k} = 1/2 (a_k^+ a_k + a_{-k} a_{-k}^+).$$

Een Lie-algebra van zes operatoren die in twee onafhankelijke hoekmomentum algebra's kan worden opgesplitst is isomorf aan de vierdimensionale rotatiegroep.⁴⁷

De veralgemening van dit resultaat voor een willekeurig groot aantal creatie- en amihilatie-operatoren toont het belang van Lie-algebra's.

Lipkin besluit:

"Consider the set of fermion creation and amihilation operators a_k^+ and a_k for n values of k . These may either be n different kinds of fermion or n different states of the same fermion. Then the set of all possible bilinear products of these creation and amihilation operators is a set of $n(2n-1)$ operators which constitute the he-algebra's for the rotation group in $2n$ dimensions. The set of all bilinear products of operators which do not change the number of particles ... is a set of n operators which are a subset of the operators forming the he algebra of the rotation group in n dimensions. These operators constitute the Lie-algebra of the group of unitary transformations in n dimensions."⁴⁸

Fermionen én bosonen moeten bestaan, onder de reële systemen. Fermionen kunnen niet dezelfde essentiële eigenschappen bezitten als andere systemen van hun soort. Bosonen kunnen dat wel. De ene drukken de differentiërende, de andere de integrerende functie van de werkelijkheid uit (denk aan het feit dat alle krachtoverdraging als een uitwisseling van bosonen

⁴⁶ zie verder Dypkin, p.36.

⁴⁷ p.72.

⁴⁸ p.74.

wordt voorgesteld).

Creatie en amihilatie van systemen moet bestaan wil de werkelijkheid in wording zijn. De creatie en amihilatie-operatoren moeten (om redenen die we hoger zagen) he-algebra's vormen.

En - door het resultaat dat hier wordt geciteerd - blijken deze Lie-algebra's met de rotatiegroep verwant. Zelfs de meest radicale wording blijkt dus nog (om redenen die werden gezien) met een groep verwant.

Nog een andere verwantschap tussen groepen en Lie-algebra's valt op: creatie- en amihilatie-operatoren kunnen, geordend, als vectoren in een ruimte worden gezien. Op deze vectoren kunnen he-groepen worden bepaald die infinitesimale transformaties genereren. De groepen die dat doen en de bilineaire producten van creatie en amihilatie invariant houden vormen symplectische groepen. De Lie-algebra⁴⁹ van de symplectische groep is weer dezelfde als die van de gewone hoekmomentalgebra.

Hoewel de uiteenzetting over de Lie-groepen en Lie-algebra's abstracter was - en moest zijn - dan die over de Galilei-groep wordt, zowel door de bepaling zelf van Lie-groep als door het verband tussen Lie-groep en he-algebra (verbonden met de intrinsieke betekenis van he-algebra's) hun belang toch evident.

9.4. Puntgroepen en kristallen

9.4.a. Inleiding: kristallen als prototypes

Het heelal is samengesteld uit stralende energie en stof. De stof doet zich - zoals men weet - in verschillende aggregaatstoestanden voor: als gas, vloeistof en als vaste stof. De vaste stof heeft op haar beurt verschillende organisatievormen: als regelmatig repetitief netwerk (kristal), als pseudo-kristal (een recente en zeer diepe ontdekking), als amorfe stof (b.v. glas), en als combinatie (b.v. mineraal). Bovendien bieden de overgangen van de verschillende aggregaatstoestanden in elkaar: van gas tot vloeistof, van vloeistof tot gas, van vloeistof tot vaste stof, en van vaste stof tot vloeistof nog dieper inzicht in de werkelijkheid. Het lijkt dus op het eerste gezicht verkeerd aan de kristallen een geprivilegieerde rol toe te kennen.

Toch is het metafysisch mogelijk in te zien dat

1. de werkelijkheid kristallen moet bevatten;
2. de werkelijkheid niet alleen kristallen kan bevatten;
3. dat een deel van de werkelijkheid kan worden begrepen vanuit de organisatie van kristallen;
4. dat er een analogie bestaat tussen de kosmologie in het algemeen, en de kristalkunde in het bijzonder.

Om die vier hypothesen te verdedigen moet iets over de kristallijne toestand als zodanig worden gezegd.

Het kristal is een lichaam waarvan de moleculen en atomen bij toevoer van warmte slechts sterker schommelen rond hun positie van evenwicht, zonder er zich duurzaam of systematisch van te verwijderen. Zulk lichaam realiseert de maximale orde die in de natuur mogelijk is. Daarom informeert het over wat de orde van de natuur kan betekenen. Een cel is een a-periodisch kristal in zijn genoom (zal later blijken) en een ideaal gas is het tegendeel van het kristal: een ongeordend aggregaat. De natuur moet zowel kristallen, gassen als cellen bevatten (naast vloeistoffen). Het zijn de verschillende typen, van organisatie en orde die mogelijk zijn.

⁴⁹ p.83.

We kunnen ze afleiden uit

1. een beginsel van maximale orde voor de totaliteit (die de vier aggregaatstypen - en andere - insluit);
2. of - alternatief - uit de interactie van orde en chaos (zelf een facet van de dualiteit systeemoorzaak).

De orde van het kristal kon worden geobserveerd omdat röntgenstralen elektromagnetische golven zijn met zeer kleine golflengten (1 angström) terwijl de atomen van een kristal op 4,8 angström van elkaar liggen. Vermits men de details van een organisatie kan zien door ze te verlichten met een licht waarvan de golflengte overeenkomt met de grootte van die details kan men de atomen in een kristal door diffractiefiguren zichtbaar maken die *dezelfde symmetrieën* zullen vertonen als het kristal zelf (von-Lane).

Hier komen een groot aantal eigenschappen van de realiteit samen. Een von-Lane foto stelt niet de atomen zelf voor maar wel de vlakken waarop de atomen geconcentreerd zijn. Het is een foto niet van de reële ruimte, maar van de reciproque ruimte waarvan de punten gelijkwaardigheidsklassen zijn van de punten van de reële ruimte.

Het heelal in zijn totaliteit wordt gekenmerkt door het optreden van grote symmetrieën (Galilei-groep, Maxwell-vergelijkingen, relativiteit, kwanta en de kernfysicagroepen) die niet perfect zijn (zie Feynman, Wigner, Weyl, e.a.). Dezelfde karakteristiek blijkt zich in de kristalkunde voor te doen. Als men de groei van kristallen en de krachten die tot kristalvorming drijven bekijkt, dan blijken ze te leiden tot een overwicht van regelmatigheid en symmetrie, gestoord door onregelmatigheden (die zelf regelmatig blijken). *Voor ons is dit een model van de totaalwerkelijkheid zelf.* De vraag is of we deze situatie kunnen gebruiken voor vermeerdering van inzicht in het totaal heelal.

De studie van kristalregelmatigheden is het fundament van die kristaloppervlakte. Zoals steeds creëert de asymmetrie het verschijnsel (en hier dus de onregelmatigheid, de manifestatie van de regelmatigheid). De geschiedenis van de natuur is het analogon van de kristaloppervlakte. De wetten drukken de orde uit; de opeenvolging haar breuk. Symmetrie en periodiciteit zijn hetzelfde (in ruimte of in tijd, voor figuren of golven). De relatie van symmetrie en invariantie blijkt: $E=h\nu$ ($\nu=1/\text{periode}$).

In een sinusorde blijft de periode gelijk. Dus: invariantie onder verplaatsing in de tijd is conservatie van energie. Als alle curven kunnen worden samengesteld uit sinusorden met verschillende perioden blijkt het asymmetrische samenstelbaar uit het symmetrische.

De kristalkunde is het deel van de natuurkunde waarin de groepentheorie het eerst toepassing heeft gevonden. De groepentheorie vindt in elektromagnetisme, relativiteit en kwanta maximale toepassing. De symmetrietheorie behoort ertoe.

De geschiedenis van de kristalkunde is een mengsel van extreem inductivisme (meten van de hoeken volgens dewelke de vlakken die een kristal begrenzen elkaar snijden) en opstellen van een typologie daarrond) en extreem a-priorisme (Haigs hypothese van de kristalkern - onzichtbaar - waaruit het totaalkristal door iteratie is opgebouwd. De kristalkunde klasseert eerst ideale kristallen (empirisme én platonisme).

Balibar vermeldt hoe

1. de theorie van kristalonregelmatigheden;
2. de relatie tussen moleculaire biologie en kristalkunde;⁵⁰
 - a) de geometrische structuur van enzymen bepaalt hun interactie;
 - b) de technologie voor macromoleculen is kristallografische terminologie;

⁵⁰ Jacob, pp.65-66.

3. de relatie tussen astrofysica en kristalkunde (?);
4. de relatie met de groepentheorie;
5. de relatie met de miniaturisatie van de elektronica en de theorie der nieuwe materialen de kristalkunde dynamiseren.

Voor ons betekent dat een ontdekken van haar wijsgerige betekenis als theorie van de maximaal geordende stof. Van 1911 tot plusminus 1960 volgt een 'normale wetenschap' (à la Kuhn) die de stoffen in hun kristalstructuur afbeeldt.

Daarna volgt

1. neutronendiffractie (in plaats van de fotonen der x-stralen). Het voordeel is: kamertemperatuur is voldoende voor lage snelheid en golflengte; de afwezigheid van lading geeft een zuiver beeld. Ze storen fotonen niet en werken beter bij lichte atomen (*H!*) (de theorie blijft klassiek: diffractie van golven).
2. synchrotron straling: acceleratoren brengen bij hoge versnelling lage golflengte x-stralen voort.

Men kan alle golflengten produceren (a) en in grote aantallen (b). De zichtbare kristaldetails nemen toe. De theorie *blijft* klassiek.

Ze is niet langer meer klassiek als men, voor het maken atoom per atoom, van materialen met specifieke eigenschappen, atomen met gespecificeerde variëteit van kwantumputten realiseert.⁵¹

P.S. de tegenstelling die men gewoonlijk onderstreept tussen cel en kristal (en die juist is tot op zekere hoogte) is dus sterk overtrokken. Juist de andere organisatievormen die het leven is maakt systematisch van de kristalorganisatie gebruik. Een *veralgemening* van het kristalbegrip is mogelijk en noodzakelijk: het aantal dimensies, het aantal eenheidscellen, de kleur, quasi-kristallen. Zo krijgt men een continue overgang van eenvoudigst geordend systeem naar chaotisch systeem.

De vruchtbaarheid van de studie der kristalonregelmatigheden blijkt uit wat volgt.

Laat de onregelmatigheid ofwel een lacune zijn (een atoom ontbreekt), ofwel een dislocatie (een lijn ontbreekt), ofwel een vlak ontbreekt, ofwel een brok. Laat deze onregelmatigheid zelf een symmetriecentrum of een symmetrieas wegnemen. Daardoor vallen *alle* symmetrieën weg behalve de symmetrie bepaald door het ontbrekend element. Dit is extern (in diffractiepatroon zichtbaar). Dit is een bijzonder geval van het algemeen probleem: welke symmetrieën worden volledig of gedeeltelijk weggenomen door welke onregelmatigheden?

Het omgekeerd probleem zou zijn: welke asymmetrieën worden geheel of gedeeltelijk weggenomen door welke regelmatigheden?

Andere vragen: *hoe vormen zich symmetrieën door de interactie van asymmetrieën?* (d.w.z. hoe groeien door krachten kristallen?). Dit zou het prototype zijn van het ontstaan van orde uit chaos.

Een kristalruimte is opgebouwd uit een eenheid, een basiscel (die zelf een aantal regelmatigheden heeft die als symmetrieën kunnen worden uitgedrukt). Het natuurlijk kristal is opgebouwd in drie dimensies. Een meer algemeen kristal kan in n dimensies worden bepaald. Deze eenheidscel wordt volgens een bepaald patroon een onbeperkt aantal malen herhaald. Een perfecte kristalruimte is oneindig. Het is een discontinue ruimte waar (postulaat van Bravais) voor een willekeurig punt P er een oneindige veelheid van andere punten bestaat, in de drie richtingen van de ruimte, zo dat rond ieder van die andere punten de organisatie van de stof dezelfde is met dezelfde oriëntatie.

Het postulaat van Söhnke-Schönflies-Todoroo is een verzwakte vorm van het postulaat van Bravais: voor ieder punt P bestaat een discontinu oneindige verzameling van punten rond wie de

⁵¹ Balibar, pp.63-64.

organisatie van de stof dezelfde is (of een spiegelbeeld van de oorspronkelijke). De oriëntatie is niet noodzakelijk dezelfde gezien vanuit ieder punt en de spiegelbeeldsymmetrie kan zich voordoen).

Als we de werkelijkheid als volledig homogeen voorstellen dan kan ze continu homogeen, of discontinu homogeen, zijn. De kristalruimte is het prototype van de discontinue homogene ruimte. Ze is niet de eenvoudigste discontinue homogene ruimte: ze is anisotroop (vermits het kristalmotief in het algemeen zal zijn georiënteerd).

Een kristalruimte hangt samen met een groep omdat als men de punten volgens een afstand d verschuift in een richting r , de ruimte invariant blijft en ieder punt in een gelijkwaardig punt overgaat. De afstand d is functie van de elementaire afstanden in het kristalmotief (de eenheidscel).

Een systeem dat uit een oneindig aantal subsystemen in volledige rust tegenover elkaar en volledig gelijkwaardig aan elkaar, is opgebouwd, volgens een constructiewet die volledig invariant is in ruimte en tijd vormt een kristalruimte.

Men weet dat op het niveau van melkwegstelsels de kosmos als homogeen en isotroop wordt gezien (ook discontinu). De kristalruimte is anisotroop.

In de kwantitatieve aardrijkskunde (synthese van natuur en menswetenschap) bouwt de theorie een systeem der centrale plaatsen op uit een benadering tot een kristalruimte. Een eindig kristal vertoont een eerste fundamentele onregelmatigheid: het heeft een grensvlak dat niet volgt uit de opbouwwet van de kristalstructuur. Dat grensvlak vertoont echter zelf typische onregelmatigheden: de hoeken van de grensvlakken zijn constant. Als men het eindig kristal wentelt volgens een bepaalde hoek rond één van zijn symmetriecentra of assen of vlakken is het opnieuw zichzelf gelijk. De rotationele symmetrie van het eindig kristal komt één-eenduidig overeen met de positionele symmetrie van de kristalruimte (die translatie en rotatie symmetrie bevat). Als men de kristalruimte met de Galilei-groep vergelijkt zal de Galilei-groep op continue en discontinue ruimten symmetrieën van verplaatsing in de ruimte en in de tijd, van rotatie en van versnelling eisen. Hier in de kristalruimte is de tijd volledig afwezig. Er blijven slechts eindige verplaatsing en eindige rotatie over, die geldig zijn voor een homogene en anisotrope ruimte. Ook ten opzichte van de Lie-groepen zijn de kristalgroepen tegengesteld: ze zijn essentieel *niet* continu.

Zelfs het *eindig* kristal is een geprivilegieerd systeem: het is in statisch evenwicht en het manifesteert door zijn symmetrieën in de ruimte (rotationeel) de (veel rijkere) symmetrieën van de elementen waaruit en de wetten volgens dewelke het is opgebouwd. Het heelal moet systemen in evenwicht bevatten. Sommige van die systemen moeten uit subsystemen zijn opgebouwd. Sommige daarvan moeten volledig periodisch zijn opgebouwd, uit volledig gelijkwaardige subsystemen. Bij eindige fragmentering moet het kristal transparant zijn in die zin dat zijn externe rotationele symmetrieën de interne opbouw volledig bepaalt (en omgekeerd). Maar terwijl er 230 positionele verschillende kristalgroepen zijn, zijn er (subgroepen) slechts 32 oriëntatieve.

Een werkelijkheid zonder kristal zou zijn, ofwel

1. een werkelijkheid zonder systemen waarvan de subsystemen in invariante relatie staan tot elkaar (zonder vaste stof);
2. een werkelijkheid zonder vaste stof (1) die volledig homogeen is opgebouwd uit gelijkwaardige cellen van dezelfde vorm.

Alle systemen zouden intern structureel variabel zijn en alle systemen (of ze nu intern structureel variabel zijn of niet) zouden aperiodisch of heterogeen zijn (opgebouwd uit verschillende bouwcellen of volgens ruimtelijk variabele constructiewetten). De eindige fragmenten zouden niet transparant (in de hierboven gegeven betekenis) zijn.

De Galilei-groep bepaalt de symmetrieën van de klassieke ruimte-tijd. De kristalgroepen bepalen de minimale afwijking van die symmetrieën nodig om de eenvoudigste systemen van subsystemen in maximaal stabiel evenwicht te omschrijven. Een echte deductie van het kristal zou moeten vertrekken van het bewijs ervoor dat de werkelijkheid noodzakelijk systemen met subsystemen moet bevatten die a) potentieel oneindig zijn, b) totaal door constructiebasis en constructiewet bepaald, c) terwijl constructiebasis en constructiewet zelf vormen van stabiliteit (en dus symmetrie) zouden zijn.

Men zou ten onrechte denken dat de anisotrope kristalruimte symmetrischer is dan een gas. Dit is niet het geval. De krachten die de ionen of atomen van een gas verbinden zijn invariant onder E , de groep der euclidische verplaatsingen (die de euclidische metriek conserveren). De symmetriegroep van een kristal is slechts een subgroep van E (de 230 kristalgroepen) terwijl een gas in evenwicht zowel isotroop als globaal (niet lokaal) homogeen is.

Een ontologische deductie van het kristal is mogelijk. Een epistemologische en een praxiologische is dat echter ook. We gaan nu eerst tot ons eigenlijk thema over: de structuur van de eindige kristalgroepen, de *puntgroepen*.

9.4.b. De symmetriegroep in twee dimensies en haar wijsgerige betekenis

1. Een bewegingsgroep is discontinu als ze geen willekeurig kleine bewegingen (draaiingen of rotaties toelaat). De he-groepen waren juist continue groepen.
De werkelijkheid moet invariant zijn onder zekere discontinue veranderingen, juist zoals ze invariant is onder zekere continue veranderingen. Indien dit niet het geval zou zijn dan zouden er geen systemen of oorzaken in eindige proporties kunnen bestaan.
2. Een discontinue groep heet een puntgroep als ze tenminste een punt invariant houdt. In dat geval mag ze geen verplaatsingen bevatten. De werkelijkheid moet kunnen worden veranderd zonder verplaatsing omdat interne veranderingen mogelijk moeten zijn (die de betrekkingen met andere systemen niet aangaan). Zulke interne veranderingen moeten soms zekere delen constant houden. De eenvoudigste delen die men constant kan houden zijn punten. Vandaar het belang van puntgroepen.
3. De cyclische groepen C_n bestaan uit draaiingen met een hoek $m \times 2\pi/n$ (met $1 \leq m \leq n$) rond een vast punt.

De diedergroepen D_n bestaan uit n weerkaatsingen langs spiegellijnen met hoek π/n .

C_1 is geen symmetrie, D_1 is bilaterale symmetrie. Men kan draaiingen met spiegelingen verbinden of ze ervan gescheiden houden.

Naast eindige rotaties en weerspiegelingen, bestaan eindige verplaatsingen. De verplaatsingen komen wel in de kristalgroep (in 3 dimensies) voor, maar men kan ze ook geïsoleerd bestuderen. Dan valt op (en dit kan geen toeval zijn) dat men ze bij ornamenten, bladeren of takken, muziek en kwantummechanica terugvindt.

De verplaatsingsgroepen langs twee dimensies bevatten ook de friesgroepen. De friesgroepen zijn discontinue bewegingsgroepen waarvan alle bewegingen dezelfde richting hebben volgens een elementaire afstand. De bepaling van het kristal toont dat men de analyse van de kristalgroepen vanuit de friesgroepen kan beginnen.

De richting heet de lengteas. De daarop rechthoekig staande richting de breedteas.

Zeven verplaatsingsgroepen vormen de friesgroep.

We zullen ze op twee manieren interpreteren: als vormen van processen (1) en als vormen van evenwichtstoestanden (2). Onze bewering is dat zowel de processen als de evenwichtstoestanden die in de werkelijkheid voorkomen deze veelheid van structuren moeten vertonen:

1. verplaatsing over elementaire afstand langs lengteas;

2. verplaatsing en spiegeling langs lengteas;
3. verplaatsing en spiegeling langs breedteas;
4. verplaatsing en rotatie over 180° (omkering);
5. 1+2+3+4 tegelijk;
6. verplaatsing en glijspiegeling (verplaatsing met $1/2$ elementaire afstand en spiegeling);
7. 3+4+6.

1 is een eenparig voortgaand proces; 2 is een eenparig voortgaand proces dat tegelijk twee de oorsprong invariant weergevende vormen treft; 3 is een periodisch proces waarvan de stadia elkaars spiegelbeeld zijn; 4 is een combinatie van twee processen die alternerend hun oorsprong in weerspiegelde vormen weergeven (zoals 2). Op dezelfde manier kan men de friesgroepen (wel tweedimensionaal maar dominerend lineair) in detail interpreteren.

Als men de wijsgerige betekenis van de friesgroepen heeft ingezien, kan men naar de ornamentgroepen overgaan (friesgroepen in twee richtingen). Zo verkrijgt men een puntennetwerk.⁵² G. Polya bewijst in 1924 dat de rotatiesymmetrieën C_1 C_2 C_3 C_4 en C_6 (360° , 180° , 120° , 90° en 60°) mogelijk zijn. Daar $C_n \subset D_n$, komen daar nog D_1 D_2 D_3 D_4 en D_6 (10 ornamentsymmetrieën bij). Slechts vijf vlakke netwerktypen zijn mogelijk: vierkant, rechthoek, parallellogram, ruit, gemengd parallellogram-ruit.

Deze details zijn van wiskundige aard. Men kan ze wijsgerig vruchtbaar maken door de basisvormen van friessymmetrie te interpreteren en te verklaren (enerzijds ontologisch, anderzijds epistemisch-praxiologisch). Dan kan men van eenvoudig naar complex opklimmen naar de discrete symmetrieën in het vlak en in de ruimte. Deze weg is gaanbaar. Toch lijkt hij onzeker (als men de interpretatiemoeilijkheden van de friessymmetrie bekijkt). Wel is het opbouwbeginnsel van principieel belang: men moet het vlak met figuren van dezelfde vorm volledig bedekken (tiling) zonder rest. Dan moet men de ruimte vullen met figuren van dezelfde vorm. Steeds moet het opbouwprincipe identisch blijven. Een benadering is (b.v.) het vullen van de ruimte met gelijk grote bollen zodat zo weinig mogelijk bollen worden gebruikt en zo weinig mogelijk ruimte open blijft. Het hexagonaal opstapelen blijkt het meest efficiënt. Een symmetrische vorm ontstaat uit een andere symmetrische vorm (hexagon uit bol).

Toch lijkt het beter niet de voor de hand liggende weg van bijzonder geval naar algemene wet te gaan maar de omgekeerde richting te volgen: vanuit het wezenlijke naar de interpretatie.

9.4.c. Wijsbegeerte en veralgemeende puntgroepen

Men vindt een toegang tot de wijsgerige benadering van de kristalgroepen door de zeven oneindige puntsymmetriegroepen van Pierre Curie te ontleden.⁵³ Laat een isotropeas een as zijn waarrond een oneindig aantal verschillende eindige rotaties het systeem invariant houden.

De zeven systemen zijn de volgende:

1. systeem met een isotropeas: aangeduid door ∞ ,
2. met één isotropeas en een oneindig aantal spiegels die loodrecht op de eerste staan en een symmetriecentrum: ∞/m ,
3. een oneindig aantal isotropeassen: $\infty\infty$,
4. een isotropeas en een oneindig aantal spiegels door de as: ∞m ,
5. een isotropeas, een orthogonale spiegel, een oneindig aantal spiegels door de as en een centrum: ∞/mm ,
6. een oneindig aantal assen, een oneindig aantal spiegels door de as en een centrum: ∞/m

⁵² Mainzer, pp.149-152.

⁵³ zie Encyclopedia universalis onder 'cristaux'.

- ∞/m ,
 7. een isotropeas en een oneindig aantal binaire assen orthogonaal erop.

Om deze lijst wijsgerig te begrijpen moet men de betekenis van

1. isotropeas en spiegeling;
2. as en centrum;
3. eindig en oneindig;
4. orthogonaal en evenwijdig

voor de invarianties van systemen begrijpen.

Een spiegeltransformatie langs een as of een vlak brengt een discontinue afbeelding van een systeem met een rotatie van 180° langs de as van dat vlak teweeg. Een spiegel bewerkt een inversie: $I^2=E$. Een rotatie heeft slechts $R^n=E$. Dus volgt: $I^2=R^n$ (voor een gegeven n , voor iedere R). De inversie verandert het teken van alle vectoren. Als men zich in een meer algemene ruimte plaatst en vectoren door relaties vervangt is de inverse een converse. Inversie commuteert met rotaties in de euclidische ruimte (b.v. $O_3=R_3 \times s_2$). Als een systeem invariant is onder een inversie in een zekere richting (spiegeling langs een vlak, linkerhand-rechterhand, gezicht voor de spiegel, enz.) dan bezit het systeem subsystemen die in die richting intern in wederkerige relaties tot elkaar staan. De betekenis van de inversie kan best begrepen worden door haar maximum te nemen: een systeem dat in alle richtingen spiegelsymmetrisch is. Daarvoor zijn alle relaties tussen de subsystemen reciproque en symmetrische relaties. Iedere hiërarchie (lineaire of meer complexe ordening) is onmogelijk. Dit kan worden toegeschreven aan de interne structuur van het systeem of aan zijn relatie met het totaal heelal: de volledige inversiesymmetrie zou kunnen betekenen dat alle discontinue richtingsveranderingen van de vectoren van de gegeven grootte van het systeem in alle richtingen invariant laten.

Als een systeem maximaal I -symmetrisch is, is het ook invariant onder alle rotaties. De relatie tussen rotatie en inversie is eng: voor iedere inversie I is er een rotatie R , zó dat $R^n=I_n$ (zoals zojuist gezegd). Gezien die verwantschap is het belangrijk zich af te vragen wat het wijsgerig betekent als een systeem wel isotropeassen heeft, maar geen spiegelsymmetrieën (hetzij door de isotropeas, hetzij orthogonaal erop).

De elementen van een puntgroep zijn eigenlijke en oneigenlijke rotaties (b.v. rotaties zonder of met inversies). Als een rotatie langs een hoek een element is van een puntgroep dan is

$[R(a)]^n=R(na)=E=R(2\pi m)$ (alle a 's moeten dus de vorm $2\pi m/n$ hebben). Als de kleinste rotatiehoek langs een as gelijk is aan $2\pi/n$ dan is de as een n -voudige as. Een rotatie door $2\pi/n$ wordt met C_n aangeduid.⁵⁴

De as met grootste symmetrie wordt conventioneel als verticale as aangeduid en het daarmee orthogonale vlak als horizontaal. Een reflectie in een horizontaal vlak heet s_h en in een verticaal vlak s_v .

Het product van C_n met een reflectie S in het vlak orthogonaal op de as van C_n is S_n (de spiegelrotatie).

$S_n=sC_n=IC_2C_n$ (het product sC_2 keert alle assen om: $sC_2=I$ en dus $S=IC_2$).

Hoe kleiner a is, des te groter zal de symmetrie van het systeem zijn (vermits alle eindige gehele veelvouden van a ook elementen van de symmetriegroep opleveren). Men kan dus de symmetrieassen volgens symmetriegraden ordenen. Dit maakt de bepaling van de verticale as mogelijk.

Iets werd nu al gezegd over de betekenis van de inversie. Een rotatie moet ook in haar wijsgerige

⁵⁴ Elliott-Dawber, p.184.

betekenis worden ontleed. Rotaties zijn in het algemeen niet commutatief (in tegenstelling tot spiegels $IR_1 = R_1I$).

$R_1R_2 \neq R_1R_2$. Inversies commuteren wel met alle rotaties. Rotaties veranderen de relaties van een systeem tot andere systemen niet. De rotatiecentra of assen worden door het systeem zelf bepaald. De inversie wordt door de spiegellijnen of vlakken buiten het systeem bepaald. Systemen zoals de leden van de eerste klasse die een oneindig aantal rotaties rond een as invariant laten hebben wel interne, maar geen externe symmetrieën.

Dit verschil tussen rotatie en inversie is hoegenaamd geen voldoende ontleding van de twee maar zet toch enkele stappen in die richting.

Het afwezig zijn van spiegels vermindert de globale symmetriegraad omdat het toevoegen van inversies de omvang van de groep verdubbelt. De toevoeging van een verticaal reflectievlak S_n impliceert de toevoeging van $n-1$ andere verticale reflectievlakken.

De tegenstelling tussen eindig en oneindig komt in de kristalruimte neer op de tegenstelling tussen geprefereerde anisotropieën (eindig in aantal) of niet geprefereerde anisotropieën.

Twee assen die evenwijdig lopen of samen vallen zijn afhankelijk; orthogonale zijn onafhankelijk.

De eis dat systemen behorend tot alle zeven symmetrieklassen in de werkelijkheid zouden aanwezig zijn komt neer op de volgende eisen.

In het deel van de werkelijkheid dat anisotropisch homogeen is en in statisch evenwicht

1. moeten systemen voorkomen die minimaal intern invariant zijn en toch reeds invariant onder een groot aantal wijzigingen: één isotropieas;
2. er moeten systemen voorkomen die intern maximaal invariant zijn: een oneindig aantal isotropieassen;
3. er moeten systemen voorkomen die minimaal intern en maximaal extern invariant zijn (met onafhankelijke invarianties);
4. er moeten systemen voorkomen die minimaal intern en maximaal extern invariant zijn (met afhankelijke invarianties);
5. er moeten systemen voorkomen die minimaal intern, maximaal onafhankelijk extern en maximaal afhankelijk extern invariant zijn;
6. er moeten systemen voorkomen die maximaal intern en maximaal extern afhankelijk invariant zijn;
7. er moeten systemen voorkomen die minimaal intern en semi-maximaal extern onafhankelijk invariant zijn.

Deze zeven eisen moeten van het wezen van de kristalruimte en van haar rol in de werkelijkheid worden afgeleid.

We doen dit niet. Maar we bevinden ons nu op gelijke afstand van wiskunde en wijsbegeerte. De mogelijkheid te doen wat we voorstellen wordt zichtbaar.

Dat er telkens een centrum moet voorkomen volgt uit de bepaling van de puntgroepen zelf.

9.4.d. Classificatie van de puntgroepen

De puntgroepen kunnen ook als volgt worden geklasseerd.

1. C_n groepen: één enkele n -voudige as voor eigenlijke rotaties;
2. voeg bij (1) een tweevoudige horizontale as (de eenvoudigste expansie zonder nieuwe n -voudige assen te creëren). Dit impliceert $n-1$ meer horizontale tweevoudige assen. Dit zijn de D_n (dihedrale groepen);
3. alle andere eigenlijke puntgroepen moeten twee of meer n -voudige assen hebben.
Vier drievoudige assen door de vertices van een tetrahedron $\therefore$ de automorfiegroep van

- het regelmatig tetrahedron (T);
4. kubus en octahedron geven viervoudige en tweevoudige rotatiesymmetrieën rond assen door de centra van de geopponeerde grensvlakken van een kubus en tweevoudige rotaties rond assen door de middenpunten van geopponeerde kanten (O);
 5. de icosahedron groep (Y) geeft drievoudige rotatieassen door de vertices van een dodecahedron. Vijfvoudige rotaties door assen door centra van opponerende grensvlakken en tweevoudige rotaties door assen door middenpunten van opponerende kanten. Icosahedron geeft zelfde symmetrieën als dodecahedron.⁵⁵

De oneigenlijke puntgroepen zijn hierbij niet inbegrepen. Een wijsgerige ontleding daarvan zou moeten vertrekken

1. van het aantal der symmetrieassen en hun betekenis (des te minder, des te lager invariantie);
2. van de multipliciteit van de assen (3-, 4-, 5-voudig) en van de verscheidenheid van die multipliciteit (weer lager multipliciteit, lagere invariantie).

Een deductie zou echter moeten aantonen waarom de werkelijkheid noodzakelijk kristallen zou moeten vertonen die iedere symmetriegraad en vorm realiseren. Men zou die deductie moeten beginnen vanuit de relatieve menigvuldigheid van de assen, verbonden met hun plaats. Dat ze mogelijk zijn (en exhaustief) is een geometrisch-wiskundig feit. Dat ze allen zijn gerealiseerd (met nog onbekende relatieve frequenties) is zeker een fysisch en misschien wel een ontologisch of metafysisch feit.

Waarom dit het geval zou zijn is de vraag die zich hier stelt!

Om dat te realiseren kan men het model volgen dat werd gesuggereerd met betrekking tot de veralgemeende puntgroepen.

De eigenlijke rotaties in het vlak behoren tot twee klassen: de C_n groep van de rotaties met een hoek $\alpha = 360^\circ/n$ deel van 360° ; de C_n groep gecombineerd met reflecties n assen die hoeken $1/2\alpha$ hebben. Dit zijn de cyclische en de dihedrale groep. Ze komen overeen met de eerste twee klassen in de reeks. Ze zijn⁵⁶ de eindige groepen van eigenlijke rotaties rond een centrum in de ruimte (C_n =rotatie in de ruimte rond een verticale as door het centrum O). Reflectie van een vlak rond een rechte l in het vlak gebeurt door een rotatie 180° rond l . Zo kan de groep D_n in een vlak omgezet worden in een groep D'_n van eigenlijke rotaties in de ruimte: rond een verticale as door O (in veelvouden van $360^\circ/n$) en omklappingen rond n horizontale assen door O die tot elkaar in gelijke hoeken $360^\circ/2n$ staan.

Als men wijsgerig het belang van de tegenstelling tussen (en combinatie met elkaar) van rotatie en reflectie begrijpt, kan men de opbouw vanuit C_n en D_n begrijpen. De drie groepen die erbij komen (tetra-, octa- en dodecahedronautomorfismen) komen met de vijf regelmatige lichamen in de ruimte van de Grieken overeen. Men kent hun belang in de eerste natuurfilosofie, Plato's Timaios.⁵⁷

De C en D groepen zijn begrepen. Hun noodzakelijkheid is ingezien. De noodzakelijkheid van de drie andere groepen zou moeten volgen uit de noodzakelijkheid van een driedimensionale ruimte met - daarin - de noodzakelijkheid van regelmatigheid (een bijzonder geval van orde). Vermits we noch over die deductie van driedimensionaliteit, noch over die van orde beschikken kunnen we dit hier niet doen. De wijsgerige betekenis van de puntgroepen wordt nu echter duidelijk.

⁵⁵ Weyl, pp.75-79, Elliot-Dawber.

⁵⁶ Weyl, p.77.

⁵⁷ Mainzer, pp.159-160.

De oneigenlijke puntgroepen worden gevormd door een S_n element bij een andere eigenlijke groep bij te voegen (men weet dat $S_n = SC_n = IC_2C_n$). De rol van weerkaatsingen werd beschreven. Als men die rol begrijpt en bovendien de betekenis van C_n en D_n , dan blijkt het grootste deel van de volgende lijst inzichtelijk.

C_{nh} : C_n + een horizontale reflectie S_n

C_{nv} : C_n + een verticale reflectie S_n

S_{nh} : D_n + een horizontale reflectie S_h

D_{nd} : D_n + een verticale reflectie S_v

T_d : T + reflectie vlakken door twee hoeken van het tetrahedron en het middenpunt van de tegenoverliggende kant (zes S_4 spiegelrotaties rond die assen)

T_h : T + inversie $T_h = T \times S_2$

O_h : O + inversie $O_h = O \times S_2$

Y_h : Y + inversie $Y_h = Y \times S_2$

9.4.e. De kristalgroepen als speciale gevallen

De reden waarom de puntgroepen een speciale vermelding verdienen is (zie de inleiding tot deze paragraaf) dat de kristalgroepen puntgroepen zijn (terwijl de kristalruimten de structuur van de grondtoestand van de stof, die met minimale energie in een stabiele statische toestand verkeert, weergeven).

Een kristal bestaat uit een atoom of een collectieatoom die op een periodieke manier doorheen de ruimte als motief wordt herhaald.

Als n_1 , n_2 en n_3 gehele getallen zijn en $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ de verplaatsingsvectoren van één netwerkpunt tot het volgende dan is $\underline{n} = n_1\underline{a}_1 + n_2\underline{a}_2 + n_3\underline{a}_3$. Ieder punt van de kristalruimte is dus geassocieerd met één of meer specifieke atomen in een specifieke oriëntatie. Om de kristalruimte invariant te houden moet een rotatie ervan, $\underline{R}$, ieder netwerk punt $\underline{n}$ in een netwerkpunt $\underline{m}$ omzetten.

$\underline{R}\underline{n} = \underline{m}$ ($= m_1\underline{a}_1 + m_2\underline{a}_2 + m_3\underline{a}_3$).

Door berekening⁵⁸ blijkt dat vijfvoudige assen of met orde > 6 uitgesloten zijn. Slechts de volgende zeven groepen zijn mogelijk: S_2 , C_{2h} , D_{2h} , D_{3d} , D_{4h} , D_{6h} , O : triclinisch, monoclinisch, orthorombisch, rhombohedraal, tetragonaal, hexagonaal en kubiek. Als men alle subgroepen van deze zeven bijvoegt verkrijgt men de 32 oriëntatiegroepen van kristallen (door nog twee translaties bij te voegen die orthogonaal staan op elkaar komt men tot de 230 positionele kristalgroepen).

Dit lijkt zeer ingewikkeld maar de structuur wordt wijsgerig inzichtelijk vanuit het uitgangspunt $C-D$. De grondeis $\underline{R}\underline{n} = \underline{m}$ volgt uit het feit dat de kristalruimte niet lege invariantiegroepen moet hebben omdat ze de structuur van de stabiele stof met minimale energie weergeeft.

Deze eis, toegepast op de puntgroepen in de driedimensionale ruimte levert de 32 oriëntatie- en 230 positiegroepen.

De eis volgt wijsgerig (zie inleiding). Dat de ruimte door de puntgroepen wordt gekarakteriseerd volgt uit de bespreking van de veralgemeende kristalgroepen.

9.4.f. Orde en chaos

In de inleiding werd vermeld dat het mengsel van regelmatigheid en onregelmatigheid dat kristallen kenmerkt ook als zodanig model kan staan voor de algemene theorie van de werkelijkheid.

⁵⁸ Elliott-Dawber, p.196.

Dit wordt nog op twee manieren duidelijker.

1. Alle puntgroepen kunnen worden gerealiseerd door caleidoscopen. Dit werd o.a. bewezen door Shubnikov (geciteerd in Mainzer) die toont dat de basisorde van de stof (in één betekenis van het woord basis) door weerspiegeling en chaos kan worden opgebouwd (de rotatie en translatie toegepast op een geordend motief is dus niet mogelijk). Dit maakt zeker de deductie van orde uit chaos niet mogelijk. Immers: hoe zou de chaos van uit zichzelf spiegelsymmetrie produceren? Maar toch vermindert het de afstand tussen chaos en orde.
2. Men kan het ontstaan van kristallen uit oververzadigde vloeibare of gasvormige oplossingen verklaren door een additief proces. Een kristalkiem (aan de limiet, één atoom of molecule) wordt in het milieu ondergedompeld en trekt elementen uit de oververzadigde oplossing aan. De kristalvlakken behoren tot drie typen: *F* (flat) volledig glad, *S* (stepped) in regelmatige trappen, *K* (kinked) onregelmatig. De groei gebeurt volgens drie verschillende mechanismen in de drie verschillende gevallen. Een kristal zal slechts ontstaan als de kiem de tendens heeft om op ieder van zijn grensvlakken gelijkaardige atomen of moleculen te fixeren. Deze groei is ongeveer het radicaal tegengestelde van celgroei of groei van intelligentie. Toch is opnieuw de onregelmatigheid belangrijk: *de onregelmatigheden katalyseren de groei van de F grensvlakken.*
 Als het kristal een prototypische waarde heeft moet de kristalgroei ook prototypische waarde hebben. Orde en chaos interageren, het oververzadigd milieu (dat bij bepaling een gebrek aan orde vertoont), de productiviteit van grenzen en onregelmatigheden (aspecten van chaos) kunnen niet productief zijn zonder de kristalkiem. Kan zonder kristalkiem een kristal ontstaan? Een fundamentele vraag! Ik vermoed van wel: door symmetriebreuk in de chaos van de oververzadiging. Dit blijft te onderzoeken.